C.U. Abdelhafid Boussouf-mila

Master 2 : Mathématiques appliquées *2022-2023*

Responsable : A. Bazeniar *Série TD N°01*

<u>Optimisation non linéaire sous contraintes</u>

<u>Exercice 1</u>

1. Trouver les tangentes de l'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

2. Déterminer le gradient et la matrice Hessienne de la fonction polynomiale

$$P(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

3. Soit A une matrice symétrique d'ordre n et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et c une constante. La fonction f définie

$$f(x) = \frac{1}{2} < Ax, x > + < b, x > + c \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

   - Montrer que $f(x^* + h) = f(x^*) + \frac{1}{2} < Ah, h >$.

<u>Exercice 2</u>

Soit f une fonction de classe C^2:

$f(x, y) = 3x - y$ Sous la contrainte $g:\ x^2 + y^2 = 5$.

1. La contrainte est-elle qualifiée ?
2. Ecrire le système de Lagrange.

<u>Exercice 3</u>

Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel a pour que la fonction suivante soit convexe sur $\mathbb{R}$

$$f(x, y) = e^x + e^y + axy$$

<u>Exercice 4</u>

Soit la fonction $f(x) = x^2 + 2y^2$ sous les contraintes $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ 2y - x \leq 1 \\ 2y + x \leq 1 \end{cases}$ $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

1. Faire un dessin représentant l'ensemble C des points de $\mathbb{R}^2$ satisfaisant les trois contraintes.
2. Montrer que f admet sur C un maximum global et un minimum global.
3. Montrer que les trois contraintes ne peuvent pas être actives simultanément.
4. Calculer les gradients de g_1, g_2 et g_3 en (x, y).
5. Etudier la qualification des contraintes.

Exercice 5

Montrer le théorème suivant:

Soit $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C1. x^* minimum local de f sur S(ensemble de contraintes) $\Rightarrow \forall$ direction admissible d en x^*, on a $\nabla f(x^*)\, d \geq 0$.

Exercice 6

Soit le problème (P) dans $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = 1 - xy$$
$$\text{s.c.}\quad g(x,y) = (x-1)^2 + y^2 - 1 \leq 0.$$

1. Justifier que le problème (P) admet une solution.
2. Ecrire le système KKT du problème.