Chapitre 1

Rappels sur les lois usuelles de probabilités

Une loi de probabilité est une fonction mathématique qui modélise théoriquement une expérience aléatoire. En biologie, ces lois jouent un rôle clé en permettant de quantifier et de prédire la variabilité des processus biologiques. Elles offrent aux biologistes les outils nécessaires pour analyser des données, poser des hypothèses et prendre des décisions éclairées. Par conséquent, ces lois contribuent à une meilleure compréhension des phénomènes aléatoires observés dans la nature.

1.1 Variable aléatoire

Définition 1.1.1

Une variable aléatoire X est une application de l'ensemble fondamental Ω dans $\mathbb{R}$, définie comme suit

$$\begin{array}{cccc} X: & \Omega & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array}$$

On distingue deux types de variables aléatoires :

1.1.1 Variable aléatoire discrète

Définition 1.1.2

Une variable aléatoire X est dite discrète si elle peut prendre un nombre fini de valeurs isolées.

Loi de probabilité

Soit X une variable aléatoire sur Ω, $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. La loi de probabilité de X est donnée par

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$p(X = x_i)$	$p(X = x_1)$	$p(X = x_2)$	$\ldots$	$p(X = x_n)$

Fonction de répartition

La fonction de répartition de la variable aléatoire X est donnée par

$$F_X(x) = p(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(X = x_i) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < x_1 \\ p_1 & \text{si} \quad x_1 \leq x < x_2 \\ p_1 + p_2 & \text{si} \quad x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 1 & \text{si} \quad x \geq x_n \end{cases}$$

Espérance mathématique

L'espérance mathématique de la v.a X est donnée par

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(X = x_i).$$

Variance et écart-type

La variance de la v.a X est donnée par

$$V(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p(X = x_i),$$

ou

$$V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p(X = x_i) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i p(X = x_i)\right)^2.$$

L'écart-type de la v.a X est donné par

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}.$$

Exemple 1.1.1

Soit l'expérience aléatoire suivante

"on lance un dé à six faces et on regarde le résultat".

On considère le jeu suivant

— *Si le résultat est pair, on gagne* 2 *DA.*
— *Si le résultat est* 1, *on gagne* 3 *DA.*
— *Si le résultat est* 3 *ou* 5, *on perd* 4 *DA.*

La variable aléatoire X représente le gain à ce jeu.

— *L'ensemble fondamentale* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
— $X\{\Omega\} = \{-4, 2, 3\}$.
— *Déterminons la loi de probabilité de X*

x_i	-4	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$

— *Déterminons la fonction de répartition de X*

$$F_X(x) = p(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(X = x_i) = \begin{cases} 0 & si \quad x < -4 \\ \frac{2}{6} & si \quad -4 \leq x < 2 \\ \frac{5}{6} & si \quad 2 \leq x < 3 \\ 1 & si \quad x \geq 3 \end{cases}$$

— *Calculons l'espérance mathématique* $E(X)$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{n} x_i p(X = x_i) \\ &= -4\left(\frac{2}{6}\right) + 2\left(\frac{3}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

— $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 8.8$ *et* $\sigma_X = \sqrt{V(X)} = 2.97.$

1.1.2 Variable aléatoire continue

Définition 1.1.3

Une variable aléatoire X est continue si elle peut prendre toutes les valeurs comprises dans un intervalle.

Densité de probabilité

Soit X une variable aléatoire continue. On dit que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *est une densité de probabilité de X si*

— $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

— f *est continue sur* $\mathbb{R}$.

— $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

Fonction de répartition

La fonction de répartition d'une variable aléatoire continue X est définie par

$$F_X(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Propriété 1.1.1

— $F_X(x)$ *est positive.*

— $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to\infty} F_X(x) = 1.$

Remarque 1.1.1

— $p(X = x) = 0.$

— $p(X \leq x) = p(X < x).$

— *la probabilité de la v.a* $X \in [a, b]$ *est donnée par*

$$\begin{aligned} p(a \leq X \leq b) &= p(a < X \leq b) \\ &= p(a \leq X < b) \\ &= p(a < X < b) \\ &= \int_a^b f(t)dt \\ &= F_X(b) - F_X(a). \end{aligned}$$

Espérance mathématique

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire continue X est donnée par

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

Variance et écart-type

La variance de la v.a.c X est donnée par

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx,$$

ou

$$V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2.$$

1.2 Lois usuelles de probabilités

1.2.1 Lois discrètes

Loi de Bernoulli

• *Une expérience aléatoire ayant deux résultats possibles, succès et échec, est appelée une expérience de Bernoulli.*

• *La loi de probabilité associée est la suivante*

la variable aléatoire $X = 1$ *en cas de succès avec la probabilité* p*, et* $X = 0$ *en cas d'échec avec la probabilité* $q = 1 - p$

$$p(X = x) = \begin{cases} p & si \quad x = 1, \\ q & si \quad x = 0. \end{cases}$$

• *Notation*

$$X \sim B(p).$$

• $E(X) = p.$

• $V(X) = pq.$

• $\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{pq}.$

Exemple 1.2.1

On lance une pièce de monnaie bien équilibrée en air. Si on obtient face, il y a succès.

- *E.a est une expérience de Bernoulli*

$$\Omega = \{face, pile\}, \ \ A = \{face\}, \ \ \overline{A} = \{pile\}.$$

- *Loi de probabilité*

La probabilité de succès est $p(A) = \frac{1}{2}$ *et celle d'échec est* $p\left(\overline{A}\right) = \frac{1}{2}$.

La loi de probabilité est donc

$$\begin{cases} \frac{1}{2} & si \quad x = face, \\ \frac{1}{2} & si \quad x = pile. \end{cases}$$

- $E(X) = p = \frac{1}{2}$.
- $V(X) = pq = \frac{1}{4}$.
- $\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \frac{1}{2}$.

Loi Binomiale

- *La loi binomiale de paramètre n et p modélise le nombre de succès obtenus lors de la répétition de n expériences de Bernoulli identiques et indépendantes.*

- *La probabilité de k succès est donnée par la formule*

$$p(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}; \ \ k = 1, 2, \ldots, n; \ \ C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

- *Notation*

$$X \sim B(n, p).$$

- $E(X) = np$.
- $V(X) = npq$.
- $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$.

Exemple 1.2.2

On jette un dé équilibré 5 fois et on s'intéressera au résultat "avoir le chiffre 2".

- *Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois le chiffre 2?*
- *Quelle est la probabilité d'obtenir au moins trois fois le chiffre 2?*
- *Calculer $E(X)$, $V(X)$ et σ_X.*

Solution

La variable aléatoire X : "avoir le chiffre 2", suit une loi binomiale $X \sim B(5, p)$.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad A = \{2\}, \quad \overline{A} = \{1, 3, 4, 5, 6\}$$

La probabilité de succès $p = p(A) = \frac{1}{6}$.

La probabilité d'échec $q = p\left(\overline{A}\right) = \frac{5}{6}$.

- *La probabilité d'obtenir deux fois le chiffre* 2

$$p(X = 2) = C_5^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{5-2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0.16.$$

- *La probabilité d'obtenir au moins trois fois le chiffre* 2 *est*

$$\begin{aligned} p(X \geq 3) &= 1 - p(X < 3) \\ &= 1 - (p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2)) \\ &= 1 - (0.4 + 0.4 + 0.16) = 0.036. \end{aligned}$$

— *Les valeurs de l'espérance, la variance et l'écart-type sont*

$$E(X) = np = \frac{5}{6}, \ \ V(X) = npq = \frac{25}{36}, \ \ \sigma_X \sqrt{V(X)} = \frac{5}{6}.$$

Loi de Poisson

• *La loi de Poisson modélise les événements rares, c'est-à-dire les événements ayant une faible probabilité de réalisation.*

• *Loi de probabilité*

$$p(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \ \ \lambda > 0.$$

• *Notation*

$$X \sim P(\lambda)$$

• $E(X) = \lambda.$

• $V(X) = \lambda.$

• $\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\lambda}.$

Exemple 1.2.3

Une centrale téléphonique reçoit en moyenne 5 *appels par minute. Quelle est la probabilité que la centrale reçoive exactement deux appels?*

La variable aléatoire X représente le nombre d'appels dans la centrale , $X \sim P(5)$,

$$p(X = 2) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \ \ = e^{-5}\frac{5^2}{2!} = 0.084.$$

1.2.2 Lois continues

Loi Normale

• *Une variable aléatoire X suit une loi normale ou loi de Gauss-Laplace de paramètres m et σ si sa densité de probabilité est donnée par*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}.$$

• *Notation*

$$X \sim N(m, \sigma).$$

Loi log normale

• *Une variable aléatoire X suit une loi log normale si* $\ln(X)$ *suit une loi normale* $N(m, \sigma)$,

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\Pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-m}{\sigma}\right)^2}, \quad x > 0.$$

• *Notation*

$$X \sim LN(m, \sigma).$$

Loi normale centrée réduite

• *Une loi normale centrée réduite est notée* $N(0, 1)$.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

• *Si* $X \sim N(m, \sigma)$, *alors* $Y = \frac{X-m}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

Loi de Khi-deux

- *Soient* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *n variables aléatoires indépendantes* $\sim N(0,1)$.

Alors $Y = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$ *suit une loi de Khi-deux à n degrés de liberté.*

$$f(y) = \frac{y^{\frac{n}{2}-1} e^{\frac{-y}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},$$

avec

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^x x^{n-1} dx.$$

- *Notation*

$$Y \sim \chi_n^2.$$

- $E(Y) = n$.
- $V(Y) = 2n$.

Loi de Student

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim N(0,1)$ *et* $Y \sim \chi_n^2$. *Alors,* $T = \dfrac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ *suit une loi de Student à n degrés de liberté.*

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\Pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

- *Notation*

$$T \sim t_n.$$

- $E(T) = 0, n > 1$.
- $V(T) = \dfrac{n}{n-2}, n > 2$.