Centre Universitaire de Mila
Institut de Mathématiques et Informatiques
Première année Master Mathématiques Appliquées et fondamentals 2024/2025

Matière : *Equations aux différences*
Responsable : *Y. Halim*

Série de TD N° 1

Exercice 1 : (Bac 2008)

I) Soit la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2, \quad u_0 = \frac{5}{2}.$$

1. Montrer que $u_n \leq 6$, $\forall n \in \mathbb{N}$
2. Vérifier que $(u_n)_n$ est croissante.
3. Est-ce que $(u_n)_n$ est convergente ?

II- On pose pour tout n, $v_n = u_n - 6$.

1. Montrer que $(v_n)_n$ est une suite géométrique.
2. Donner le terme général de u_n en fonction de n et calculer $\lim u_n$.

Exercice 2 :

Donner la forme générale de la solution de l'équation aux différences suivant

$$x_{n+1} = a(n)x_n, \quad x_{n_0} = x_0, \quad n \geq n_0 \geq 0, \tag{1}$$

où $a(n) \neq 0$, et $a(n)$ est un fonction réel définie sur $\mathbb{N}_0$.

Application : Trouvez les solutions des équations aux différences suivants :

(a) $x_{n+1} - 3^n x_n = 0, \quad x_0 = c.$

(b) $x_{n+1} - \frac{n}{n+1}x_n = 0, \quad n \geq 1, \quad x_1 = c.$

Exercice 3 :

Donner la forme générale de la solution de l'équation aux différences suivant

$$y_{n+1} = a(n)y_n + g(n), \quad y_{n_0} = y_0, \quad n \geq n_0 \geq 0, \tag{2}$$

où $a(n) \neq 0$, et $a(n)$ et $g(n)$ sont deux fonctions réels définies sur $\mathbb{N}_0$.

Application : Trouvez les solutions des équations aux différences suivants :

(c) $x_{n+1} = 2x_n + 3^n, \quad x(1) = 0.5.$

(b) $x_{n+1} = (n+1)x_n + 2^n(n+1)!, \quad x(0) = 1.$

Exercice 4 : (Examen 2022)

Soit $\{S_n\}_{n\geq 0}$ la suite de Balancing définie par

$$B_{n+2} = 6B_{n+1} - B_n, \quad B_0 = 0, B_1 = 1.$$

1. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{B_{n+r}}{B_n}$, $n, r \in \mathbb{N}$
2. Montrer que
$$B_{n+r}B_{n+1} - B_{n+r+1}B_n = B_r, \quad \forall n, r \geq 0. \tag{3}$$

Exercice 5 : (Interrogation 2022)

Résoudre les équations aux différences suivantes

$$x_{n+1} - \frac{n}{n+1}x_n = \frac{1}{n}, \quad x_1 = 2. \tag{4}$$

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = e^{nlog(3)}n^3 + 3^n n. \tag{5}$$