

Série no 1 : Gestion des files d'attente

Exercice 1. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi uniforme continue sur l'intervalle $[a, b]$, avec $a = 1$ et $b = 4$.

1. Trouvez la fonction de densité de probabilité $f_Y(y)$ et la fonction de répartition cumulative $F_Y(y)$.
2. Calculez $P(Y > 2.5)$ en utilisant la FRC.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On vous donne la densité de probabilité de X :

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

1. Trouvez la fonction de répartition cumulative $F_X(x)$ pour $x \geq 0$.
2. Calculez la probabilité que X soit comprise entre 1 et 3, c'est-à-dire $P(1 \leq X \leq 3)$, pour $\lambda = 2$.

Exercice 3. Utilisant le code Python, répondre aux questions suivantes :

1. Générer 100 variables aléatoires uniformes entre $[0,100]$.
2. Générer 100 variables aléatoires exponentielles de $\lambda = 1.5$.
3. Tracer les deux histogrammes des données générées.

Exercice 4. Dans une station-service, les voitures arrivent suivant un processus de Poisson avec un taux d'arrivée constant de 4 voitures par minute.

1. Modélisez les temps inter-arrivées des voitures à la station-service à l'aide d'une loi exponentielle.
2. Générer les 5 premiers temps inter-arrivées des voitures en utilisant la loi exponentielle.
3. Calculez la probabilité qu'il s'écoule plus de 30 secondes avant l'arrivée de la prochaine voiture.
4. Calculez le temps moyen inter-arrivées pour ces voitures.

Exercice 5. Un guichet de banque reçoit des clients à un taux moyen de 15 clients par heure. Le temps entre les arrivées suit une distribution exponentielle.

1. Modélisez le processus d'arrivée des clients à ce guichet en tant que processus de Poisson.
2. Calculez la probabilité qu'aucun client n'arrive dans un intervalle de 10 minutes.
3. Déterminez la probabilité qu'au moins 2 clients arrivent dans une période de 5 minutes.
4. Quel est le temps moyen entre deux arrivées successives ?
5. Si un client est arrivé, quelle est la probabilité qu'il faille attendre plus de 6 minutes avant l'arrivée du prochain client ?