Gestion des files d'attentes

A. Bazeniar

Enseignant chercheur
Centre universitaire Abdelhafid Boussouf
Mila, Algérie

Se reporter à des manuels de base et à certaines livres de spécialités

Septembre 2024

Chapitre 1

Théories des files d'attente : Objets combinatoires

Introduction

Les objets combinatoires liés aux files d'attente se réfèrent aux structures et concepts mathématiques qui peuvent être utilisés pour modéliser, analyser et résoudre des problèmes de files d'attente. Les files d'attente, qui apparaissent souvent dans des systèmes tels que les centres de service, les réseaux informatiques, les systèmes de communication, ou les transports, peuvent être analysées à l'aide de la théorie des files d'attente (ou queueing theory). Cette théorie utilise divers outils et objets combinatoires pour mieux comprendre leur comportement.

1.1 variables aléatoires

Une variable aléatoire (souvent notée X, Y, etc.) est une fonction qui associe un nombre réel à chaque résultat d'une expérience aléatoire. Elle permet de quantifier les résultats d'expériences incertaines et de les analyser mathématiquement. Il existe deux principaux types de variables aléatoires :
Variable aléatoire discrète : Elle prend un nombre fini ou dénombrable de valeurs. Exemple : Le nombre de clients qui arrivent dans une file d'attente en une heure.
Variable aléatoire continue : Elle peut prendre un nombre infini de valeurs dans un certain intervalle. Exemple : Le temps d'attente avant qu'un client soit servi.

1.2 La fonction de distribution cumulative (répartition) (FDC)

La **fonction de distribution cumulative** (répartition)décrit la probabilité qu'une variable aléatoire prenne une valeur inférieure ou égale à une certaine valeur donnée. Elle donne la probabilité cumulative jusqu'à un certain seuil et est un outil essentiel pour comprendre la distribution d'une variable aléatoire.

Définition 1.2.1. *Soit X une variable aléatoire. La fonction de distribution cumulative $F_X(x)$est définie comme :*

$$F_X(x) = P(X \leq x). \tag{1.1}$$

Elle a les propriétés suivantes :
— $0 \leq F_X(x) \leq 1$ pour tout x,
— $F_X(x)$ est une fonction croissante,
— $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.

La fonction de distribution fournit une représentation complète de la probabilité que la variable aléatoire prenne des valeurs dans des intervalles donnés.

Exemple

Considérons une variable aléatoire X qui prend les valeurs $1, 2, 3$ avec des probabilités $P(X = 1) = 0{,}2$, $P(X = 2) = 0{,}5$, et $P(X = 3) = 0{,}3$. La fonction de distribution cumulative $F_X(x)$ est :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 0{,}2 & \text{si } 1 \leq x < 2, \\ 0{,}7 & \text{si } 2 \leq x < 3, \\ 1 & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

1.3 Fonction de densité de probabilité (FDP)

Pour une **variable aléatoire continue**, la probabilité que X prenne une valeur dans un petit intervalle autour de x est donnée par la **fonction de densité de probabilité** $f_X(x)$.

Définition 1.3.1. *La fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire continue X est une fonction $f_X(x)$ telle que :*

$$P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)\,dx. \tag{1.2}$$

Cela signifie que la probabilité que X prenne une valeur dans l'intervalle (a, b) est égale à l'aire sous la courbe de $f_X(x)$ entre a et b.

La densité de probabilité $f_X(x)$ est une fonction qui permet de décrire la répartition des probabilités pour une variable aléatoire continue. La relation entre la fonction de densité et la fonction de distribution est la suivante :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt. \tag{1.3}$$

Propriétés

— **Non-négativité** : Pour toute valeur x,

$$f_X(x) \geq 0. \tag{1.4}$$

Cela reflète le fait qu'une probabilité ne peut pas être négative.

— **Normalisation** : L'intégrale de la fonction de densité de probabilité sur l'ensemble de la ligne réelle doit être égale à 1 :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1. \tag{1.5}$$

Cette propriété assure que la somme des probabilités sur toutes les valeurs possibles de la variable aléatoire est égale à 1.

Utilisation

En matière de file d'attente, on utilise la FDP pour modéliser les temps d'attente ou les intervalles entre les arrivées.

Exemple

Si X est une variable aléatoire suivant une loi normale avec une moyenne $\mu = 0$ et une variance $\sigma^2 = 1$, alors sa fonction de densité est :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

La probabilité que X prenne une valeur entre -1 et 1 est donnée par :

$$P(-1 \leq X \leq 1) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \approx 0{,}6827.$$

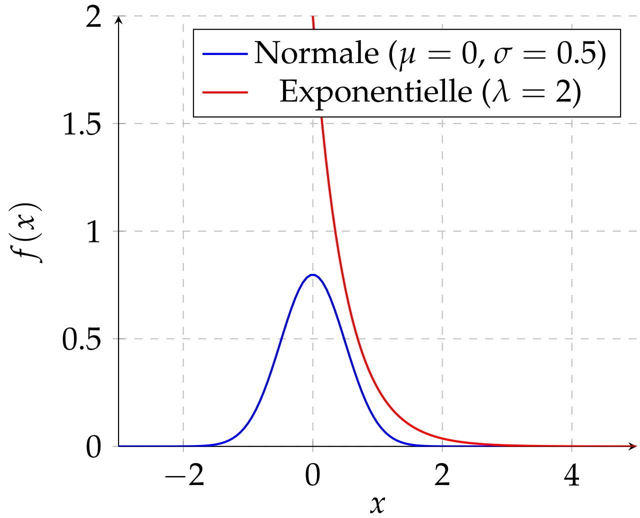


FIGURE 1.1 – Loi Normale et Exponentielle.

Résumé des Lois de Probabilité

Loi	Densité / Probabilité
Loi Normale (Gaussienne)	$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
Loi Exponentielle	$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad \text{pour } x \geq 0$
Loi Uniforme	$f_X(x) = \frac{1}{b-a}, \quad \text{pour } a \leq x \leq b$
Loi de Poisson	$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad \text{pour } k = 0, 1, 2, \ldots$
Loi Binomiale	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad \text{pour } k = 0, 1, \ldots, n$
Loi Gamma	$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}, \quad \text{pour } x \geq 0$
Loi Géométrique	$P(X = k) = (1-p)^{k-1} p, \quad \text{pour } k = 1, 2, 3, \ldots$

— Loi de Poisson : Modélise le nombre d'événements dans un intervalle de temps donné.

— Loi Normale (Gaussienne) : Distribution continue caractérisée par sa moyenne μ et sa variance σ^2.

— Loi Géométrique : Modélise le nombre d'essais nécessaires avant de réussir pour la première fois.

— Loi Gamma : Modélise les sommes de variables aléatoires exponentielles.

— Loi Binomial : Modélise le nombre de succès dans n essais indépendants avec probabilité de succès p.

— Loi Uniforme : Tous les résultats dans l'intervalle $[a, b]$ ont la même probabilité.

— Loi Exponentielle : Utilisée pour modéliser le temps d'attente entre des événements.

1.4 Espérance mathématique (moyenne)

L'**espérance** d'une variable aléatoire X, notée $\mathbb{E}[X]$ ou $E(X)$, est une mesure de la "valeur moyenne" de X si l'expérience était répétée de nombreuses fois.

— Pour une **variable discrète** X, l'espérance est donnée par :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_x x \cdot P(X = x),$$

où la somme est prise sur toutes les valeurs possibles de X.

— Pour une **variable continue**, l'espérance est donnée par :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx.$$

Exemple

Si X est une variable aléatoire représentant le lancer d'un dé à six faces, ses valeurs possibles sont $1, 2, 3, 4, 5, 6$ avec des probabilités égales $P(X = k) = \frac{1}{6}$. L'espérance de X est :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{6} k \cdot \frac{1}{6} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3{,}5.$$

1.5 Variance et écart-type

La **variance** d'une variable aléatoire X, notée $\mathrm{Var}(X)$, mesure la **dispersion** des valeurs de X par rapport à son espérance. Elle est définie comme l'espérance du carré de l'écart entre X et son espérance :

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2].$$

Une formule équivalente souvent utilisée est :

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

Exemple

Considérons une variable aléatoire X qui prend les valeurs 1 avec une probabilité 0,2 et 4 avec une probabilité 0,8. Son espérance est :

$$\mathbb{E}[X] = 1 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}8 = 3{,}4.$$

La variance de X est :

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = (1^2 \cdot 0{,}2 + 4^2 \cdot 0{,}8) - 3{,}4^2 = 1{,}04.$$

1.6 Loi uniforme

Pour une variable aléatoire continue X suivant une loi **uniforme** sur l'intervalle $[a, b]$, chaque valeur dans cet intervalle a la même probabilité d'occurrence. Sa densité de probabilité est :

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \leq x \leq b.$$

L'espérance est $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$ et la variance est $\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

1.7 Loi exponentielle

La loi exponentielle est utilisée pour modéliser le temps d'attente entre des événements qui se produisent de manière aléatoire et indépendante, à un taux constant. Si T représente le temps d'attente entre deux événements, alors T suit une loi exponentielle de paramètre λ, avec la fonction de densité de probabilité (f.d.p) donnée par :

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

où $\lambda > 0$ est le paramètre de la loi exponentielle et représente le taux d'événements par unité de temps.

Propriétés de la loi exponentielle

— Fonction de répartition (F.d.r) : La fonction de répartition $F(t)$, qui donne la probabilité que le temps d'attente soit inférieur ou égal à t, est :

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

— Espérance (temps moyen d'attente) : L'espérance $\mathbb{E}(T)$, c'est-à-dire le temps moyen d'attente entre deux événements, est donnée par :

$$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{\lambda}$$

— Mémoire sans mémoire : Une des propriétés essentielles de la loi exponentielle est qu'elle est sans mémoire. Cela signifie que pour tout $t \geq 0$ et $s \geq 0$, la probabilité que l'événement se produise après un temps $t + s$ sachant qu'il ne s'est pas produit pendant t est donnée par :

$$P(T > t + s \mid T > t) = P(T > s) = e^{-\lambda s}$$

Cela montre que la probabilité ne dépend pas du temps écoulé, uniquement de la durée restante s.

Exemples d'application

1. Systèmes de files d'attente : Dans un système $M/M/1$, les temps d'arrivée des clients et les temps de service suivent souvent une loi exponentielle.
2. Temps entre les pannes : La loi exponentielle est couramment utilisée pour modéliser le temps entre les pannes d'une machine, lorsque les pannes surviennent de manière aléatoire.
3. Télécommunications : En télécommunications, le temps entre l'arrivée de deux paquets de données sur un serveur ou routeur suit souvent une loi exponentielle.

Exemple sur la Loi Exponentielle

Dans cet exercice, nous allons étudier le temps d'arrivée entre deux clients dans une banque, modélisé par une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 3$ clients par heure. Cela signifie que le temps T entre deux arrivées suit une loi exponentielle de densité :

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} = 3e^{-3t}, \quad t \geq 0$$

où t est le temps en heures.

1. Probabilité qu'un client arrive dans les 10 premières minutes :
   Les 10 premières minutes correspondent à $\frac{10}{60} = \frac{1}{6}$ d'heure. Nous cherchons donc la probabilité que le temps d'attente T soit inférieur ou égal à $\frac{1}{6}$.
   La fonction de répartition pour la loi exponentielle est donnée par :

   $$F(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

   Substituons $\lambda = 3$ et $t = \frac{1}{6}$:

   $$P(T \leq \frac{1}{6}) = 1 - e^{-3\times\frac{1}{6}} = 1 - e^{-0.5} = 0.3935$$

2. Probabilité qu'un client arrive après plus de 30 minutes :
   Les 30 minutes correspondent à $\frac{30}{60} = 0.5$ heures. Nous cherchons donc la probabilité que le temps d'attente T soit supérieur à 0.5.
   Puisque $P(T > t) = 1 - P(T \leq t)$, on a :

   $$P(T > 0.5) = e^{-3\times 0.5} = e^{-1.5} = 0.2231$$

3. Temps moyen d'attente entre deux arrivées :
   L'espérance de la loi exponentielle est donnée par :

   $$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{\lambda} \approx 0.3333 \,\text{heures}$$

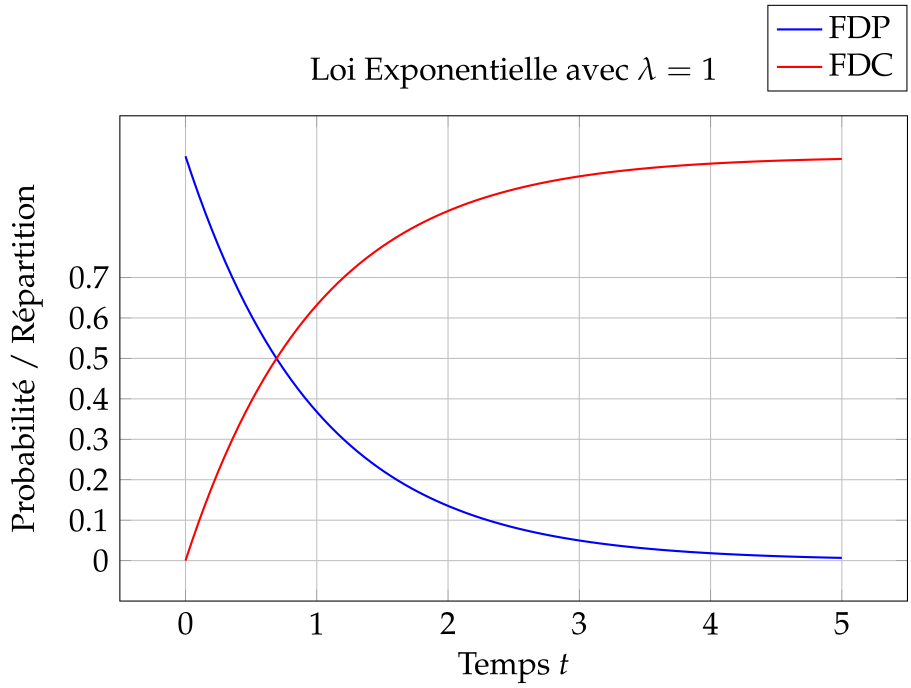


FIGURE 1.2 – La densité et la répartition de Loi exponentielle.

1.8 Loi de Poisson

La loi de Poisson est utilisée pour modéliser le nombre d'événements se produisant dans un temps fixe t ou un espace fixe, à un taux moyen constant λ. Ce paramètre λ représente le *nombre moyen d'événements* se produisant pendant l'intervalle considéré.

Si $N(t)$ représente le nombre d'événements se produisant dans l'intervalle de temps t, alors la probabilité d'observer exactement n événements est donnée par :

$$P(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

où :

— λ est le taux d'occurrence moyen par unité de temps,
— n est le nombre d'événements observés,
— t est l'intervalle de temps observé.

Preuve de la Loi de Poisson

— Soit λ le taux moyen d'événements par unité de temps. Nous voulons prouver que le nombre d'événements $N(t)$ dans un intervalle de temps t suit la loi de Poisson.
— Divisons l'intervalle de temps t en n sous-intervalles de longueur $\Delta t = \frac{t}{n}$. On suppose que n est suffisamment grand et que Δt est suffisamment petit.
— La probabilité qu'un événement se produise dans un sous-intervalle Δt est approximativement $\lambda \Delta t$.

— La probabilité qu'aucun événement ne se produise dans cet intervalle est alors $P(0) = 1 - \lambda\Delta t$.

— Pour de très petits Δt (i.e., lorsque $\Delta t \to 0$), nous pouvons utiliser l'approximation suivante :

$$P(0) = e^{-\lambda\Delta t} \approx 1 - \lambda\Delta t$$

— Pour un intervalle de temps t, la probabilité qu'il y ait k événements dans n sous-intervalles peut être modélisée comme suit :

$$P(N(t) = k) = \binom{n}{k} P(1)^k P(0)^{n-k}$$

où $P(1)$ est la probabilité qu'un événement se produise dans un sous-intervalle. En utilisant notre approximation :

$$P(1) = \lambda\Delta t \quad \text{et} \quad P(0) = e^{-\lambda\Delta t}$$

— En substituant les valeurs dans l'équation précédente :

$$P(N(t) = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}(\lambda\Delta t)^k (e^{-\lambda\Delta t})^n$$

En prenant la limite lorsque $n \to \infty$ (et donc $\Delta t \to 0$ et $n\Delta t = t$), on obtient :

$$P(N(t) = k) \approx \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

— La probabilité $P(N(t) = k)$ suit donc la loi de Poisson :

$$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

Interprétation

La loi de Poisson est donc obtenue en modélisant un processus d'événements indépendants à un taux constant. Cette approche mathématique nous permet de caractériser les événements aléatoires dans des systèmes tels que les files d'attente, les appels téléphoniques, et d'autres domaines où des événements se produisent dans un intervalle de temps donné.

1.8.1 Conditions d'application de la loi de Poisson

La loi de Poisson est utilisée lorsque les conditions suivantes sont respectées :

— Les événements sont *indépendants* les uns des autres (c'est-à-dire qu'un événement n'influence pas l'occurrence des autres).

— Le taux d'arrivée λ est *constant* sur l'intervalle de temps ou d'espace observé.

— Deux événements ne peuvent pas se produire *exactement en même temps* (événements discrets).
— L'occurrence d'un événement dans une petite période de temps est proportionnelle à la longueur de cette période.

1.8.2 Propriétés de la loi de Poisson

1. La moyenne ou espérance mathématique d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson est égale au paramètre λ :
$$\mathbb{E}[X] = \lambda.$$
2. La variance d'une variable suivant une loi de Poisson est également égale à λ. Cela signifie que la loi de Poisson présente une propriété particulière où la moyenne et la variance sont égales :
$$\mathrm{Var}(X) = \lambda.$$
3. Si $X_1 \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$ et $X_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$ sont deux variables indépendantes suivant des lois de Poisson, alors leur somme $X_1 + X_2$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$:
$$X_1 + X_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2).$$

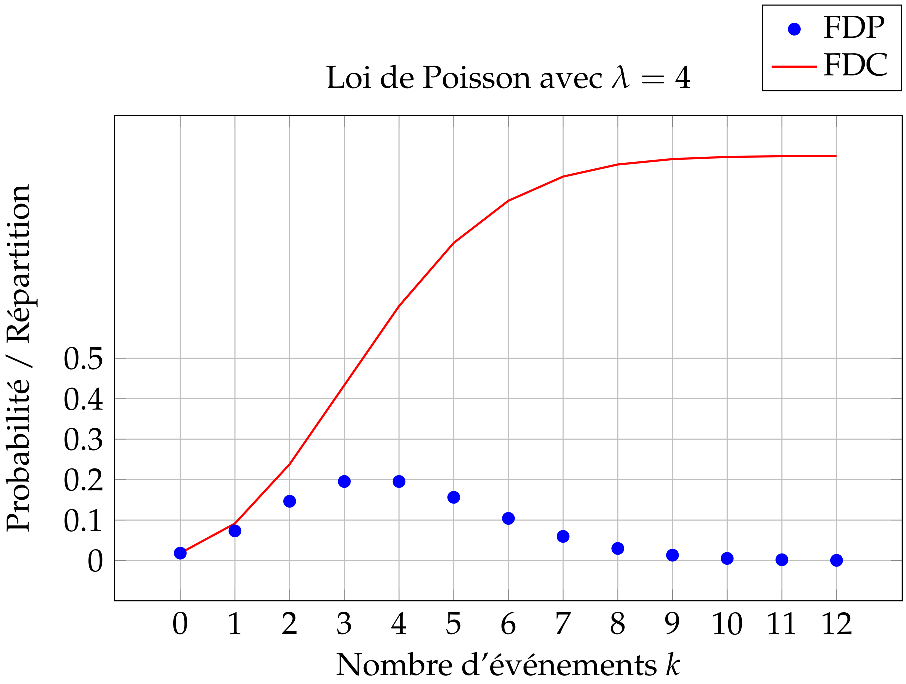
1.8.3 Exemple : Modélisation des appels téléphoniques

Un centre d'appel reçoit en moyenne 10 appels par minute. Si l'on veut savoir quelle est la probabilité de recevoir exactement 8 appels dans la prochaine minute, on peut utiliser la loi de Poisson avec $\lambda = 10$ (nombre moyen d'appels par minute). La probabilité de recevoir exactement 8 appels est donnée par :

$$P(N = 8) = \frac{(10)^8 e^{-10}}{8!}.$$

1.8.4 Exemple : Modélisation des files d'attente

Dans les systèmes de files d'attente (par exemple, dans un supermarché ou un centre de service), le nombre de clients arrivant pendant une période fixe peut être modélisé par une loi de Poisson. Cela permet d'optimiser le nombre de serveurs nécessaires pour répondre à la demande de manière efficace.


Loi de Poisson avec $\lambda = 4$
FDP
FDC
Probabilité / Répartition
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
Nombre d'événements k