الجمهـوريـــة الجزائـريـــة الديمقراطيـــة الشـعبـيـة
Democratic and Popular Republic of Algeria

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministry of Higher Education and Scientfiic Research
et de la Recherche Scientfiique

المركز الجامعي عبد الحفيظ بوصوف ميلة
Abdelhafid Boussouf University Center, Mila

Institute of Science and Technology **معهد العلوم والتقنية**

نشرة دروس العلوم و التقنية
مقياس

فيزياء الاهتزازات والموجات الميكانيكية

من إعداد :

◄ الأستاذ بن لطرش محمد الصالح

◄

◄

السنة الجامعية: 2025-2024

المحتويات

مقدمة

هذه الدروس مخصصة لطلبة السنة الثانية في تخصص هندسة الطرائق. يهدف هذا المقياس إلى توضيح ظاهرة الاهتزازات الميكانيكية ذات التذبذبات الصغيرة في الأنظمة ذات درجة أو درجتين من الحرية، بالإضافة إلى دراسة انتشار الموجات الميكانيكية.

المعرفة المسبقة المطلوبة: مفاهيم الرياضيات والفيزياء من السنة الأولى.

هيكل الكتاب: الكتاب مقسم إلى قسمين رئيسيين:

القسم الأول: الاهتزازات الميكانيكية

1. الفصل الأول: مقدمة في معادلات لاجرانج
2. الفصل الثاني: التذبذبات الحرة للأنظمة ذات درجة حرية واحدة
3. الفصل الثالث: التذبذبات القسرية للأنظمة ذات درجة حرية واحدة
4. الفصل الرابع: التذبذبات الحرة للأنظمة ذات درجتين من الحرية
5. الفصل الخامس: التذبذبات القسرية للأنظمة ذات درجتين من الحرية

القسم الثاني: الموجات

1. الفصل الأول: ظاهرة الانتشار أحادية البعد
2. الفصل الثاني: الأوتار المهتزة
3. الفصل الثالث: الموجات الصوتية في السوائل
4. الفصل الرابع: الموجات الكهرومغناطيسية

باب 1

عموميات :مقدمة إلى معادلات لاغرانج

1.0.1 معلومات عامة عن الاهتزازات

تعريف الحركة الدورية

نقول عن لحركة أنها دورية إذا تكررت بنفس الطريقة خلال فترات زمنية متساوية. نقدم فيما يلي بعض المفاهيم الأساسية حول الحركات الاهتزازية و الذبذبات و نقدم الوصف الرياضي لها

تعريف 1

الذبذبة هي أي حركة متكررة حول نقطة التوازن، تحدث في أنظمة مختلفة مثل الأنظمة الميكانيكية (مثل البندول)، أو الكهربائية (مثل التيار المتردد)، أو البيولوجية (مثل ضربات القلب). وعادةً ما يصف الحركة السلسة الدورية، على الرغم من أنه يمكن أن يحدث أيضًا في سياقات غير فيزيائية مثل موجات الضوء، التي تتذبذب دون اهتزاز ميكانيكي. وتشمل الأمثلة البندولات والإشارات الكهربائية والدورات الموسمية. يمكن أن تحدث التذبذبات في الأنظمة الفيزيائية أو الكيميائية أو الكهربائية أو البيولوجية.

تقسم إلى تذبذبات:

1. التذبذبات الحرة: تحدث عندما يتذبذب الجسم دون تدخل خارجي أو احتكاك.
2. التذبذبات المخمدة: يتأثر الجسم بقوى احتكاك تبدد الطاقة، ما يؤدي إلى توقف التذبذب تدريجيًا.
3. التذبذبات القسرية: تحدث عندما ينقل فعل خارجي طاقة إلى المذبذب.

4. التذبذبات القسرية المخمدة: القوة الخارجية الدورية تعوض فقدان الطاقة بسبب الاحتكاك، مما يحافظ على التذبذبات.

تعريف 2

تعريف الاهتزاز: التعريف: يشير الاهتزاز على وجه التحديد إلى التذبذبات الميكانيكية السريعة لمادة أو جسم. وهو يتضمن حركة الجسيمات أو الهياكل ذهابًا وإيابًا، غالبًا استجابة لقوة خارجية.

نوع الحركة: يرتبط الاهتزاز عمومًا بالحركات السريعة ذات السعة الصغيرة حول موضع التوازن، وغالبًا ما ينتج صوتًا أو حرارة مع تبدد الطاقة.

الأمثلة:

1. اهتزاز وتر الجيتار عند نتفها.
2. اهتزاز الهاتف المحمول أثناء إشعار.
3. الحركة الاهتزازية لمحرك أو آلة.
4. الطبيعة الميكانيكية: يتضمن الاهتزاز عادةً **أنظمة ميكانيكية ويرتبط عادةً بالأشياء المادية.

الاختلافات الرئيسية بين الاهتزازات و الذبذبات :

1. النطاق:
- التذبذب هو مصطلح أكثر عمومية ويمكن تطبيقه على أي حركة متكررة (ميكانيكية، كهربائية، بيولوجية، إلخ).
- يشير الاهتزاز على وجه التحديد إلى التذبذبات الميكانيكية لهيكل أو جسم.

2. السرعة والسعة:
- غالبًا ما يكون الاهتزاز أسرع وينطوي على حركات أصغر، في حين يمكن أن يكون التذبذب أبطأ ويغطي نطاقًا أكبر من الحركة.

3. الأنظمة:
- ينطبق التذبذب على أنظمة متنوعة مثل الدوائر الكهربائية والأشياء الميكانيكية.
- يقتصر الاهتزاز عادةً على الأنظمة الميكانيكية أو الفيزيائية.
- التذبذب هو مفهوم عام للحركة الدورية، ينطبق على أنظمة مختلفة.
- الاهتزاز هو نوع محدد من التذبذب يشير إلى الحركة الميكانيكية للأشياء.

الشكل الرياضي: - **غالبًا ما يتم وصف الحركة الدورية رياضياً من خلال وظائف الجيب أو جيب التمام، والتي تعكس الطبيعة المتكررة للحركة. بالنسبة للحركات السريعة نستخدم التردد (f) المعبر عنه بالهرتز (HZ) ويرتبط بالدور بواسطة:**

$$f = \frac{1}{T} \tag{1}$$

يسمى عدد الدورات في الثانية بالنبضات ω (يُشار إليها، وتُقاس بالراديان/ثانية)

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \tag{2}$$

1Hz = دورة في الثانية

10 = 1KHz ^{3}Hz

$1MHz = 10^6 Hz$

$1GHz = 10^9 Hz$

ملاحظة 1

1-يُقال إن المذبذب متناغم إذا تطور النظام وفقًا لقانون دوري للشكل الجيبي (الشكل 1-1).

2- يقال أن المذبذب غير متناغم إذا تطور النظام وفقًا لقانون دوري لأي شكل غير جيبي الشكل 1-2.

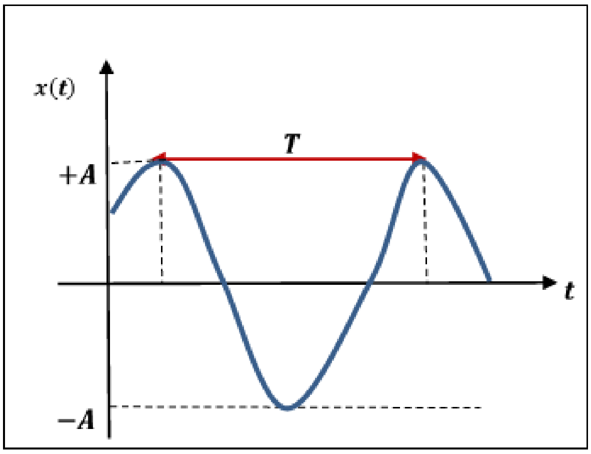
$$x(t) = A\cos(t + \varphi) \tag{3}$$

A : سعة التذبذب (القيمة القصوى للإزاحة)

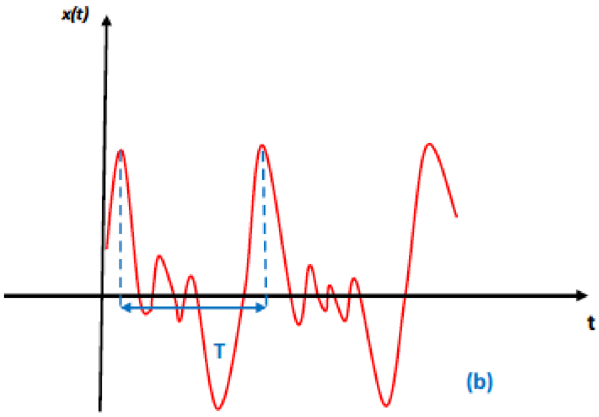
ω : نبض التذبذب

φ : الطور الأولي (t = 0)

السرعة: v سرعة النقطة المتذبذبة M هي المشتقة لإزاحتها.



شكل 1.1: الشكل الجيبي للموجة المتناغم



شكل 2.1: الشكل الغير متناغم

2.0.1 مفهوم الطاقة

يتضمن مفهوم الطاقة في الاهتزاز والتذبذب التبادل المستمر بين شكلين أساسيين للطاقة الميكانيكية: الطاقة الحركية (KE) والطاقة الكامنة (PE). في الأنظمة التي تتعرض للاهتزاز أو التذبذب، تتحرك الطاقة ذهابًا وإيابًا بين هذين الشكلين أثناء تحرك الجسم أو النظام خلال دورته.

إجمالي الطاقة الميكانيكية:

تظل الطاقة الميكانيكية الكلية في نظام مهتز أو متذبذب ثابتة (بافتراض عدم وجود فقدان للطاقة بسبب الاحتكاك أو التخميد). هذه الطاقة هي مجموع الطاقة الحركية والطاقة الكامنة في أي نقطة معينة من الحركة.

$$E_{Tot} = KE + PE = Const \tag{4}$$

طاقة الحركة :(KE)

طاقة الحركة هي طاقة الحركة. وهي تصل إلى أقصى حد لها عندما يتحرك الجسم بأسرع ما يمكن، وهو ما يحدث عادةً عندما يمر الجسم عبر موضع توازنه (مركز حركته). صيغة طاقة الحركة:

$$KE = \frac{1}{2} m v^2 \tag{5}$$

$$v = \frac{\partial x}{\partial t} = \dot{x} \tag{6}$$

$$\Rightarrow KE = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \tag{7}$$

حيث m هي كتلة الجسم و v هي سرعته. - في النظام المتذبذب، تكون الطاقة الحركية في أعلى مستوياتها عندما تكون السرعة أعظمية وتساوي صفراً عند نقاط تحول الحركة.

الطاقة الكامنة (PE)

- الطاقة الكامنة هي الطاقة المخزنة بسبب موضع الجسم أو تكوينه. في الأنظمة المهتزة، يمكن أن تكون هذه الطاقة طاقة وضع مرنة (في الينابيع) أو طاقة وضع الجاذبية (في البندولات). - في النظام المتذبذب، تبلغ طاقة الكامنة أقصاها عندما يكون الجسم عند أقصى نقاط حركته (نقاط الدوران) وتساوي صفراً عند موضع الاتزان. - معادلة طاقة الكامنة في نظام الكتلة- النابض:

$$PE = \frac{1}{2} k x^2 \tag{8}$$

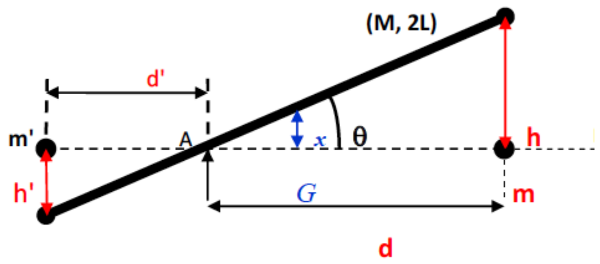
حيث k هو ثابت النابض، و x هو الإزاحة من موضع الاتزان.

- التخميد وفقدان الطاقة: - في الأنظمة الحقيقية، يمكن أن يتسبب التخميد (بسبب الاحتكاك أو مقاومة الهواء) في فقدان الطاقة في شكل حرارة، مما يؤدي إلى انخفاض تدريجي في سعة الاهتزاز. - في النظام المخمّد، تنخفض الطاقة الميكانيكية الكلية بمرور الوقت، مما يؤدي في النهاية إلى توقف الحركة.

مثال 1

- المذبذب التوافقي البسيط: في نظام الكتلة- النابض: تتحرك الكتلة ذهابًا وإيابًا، محولة طاقة الوضع المخزنة في النابض إلى طاقة حركية والعكس صحيح.
- النواس: في النواس، تتبادل طاقة وضع الجاذبية والطاقة الحركية أثناء تأرجح البندول من جانب إلى آخر.
- اهتزاز الوتر: عندما يهتز وتر القيثارة، فإن الشد في الوتر يخزن طاقة الوضع، بينما تترجم حركة الوتر إلى طاقة حركية.

$h!$



شكل 3.1: نواس مركب من قضيب و كتلتين

مثال 2

مثال عملي افترض أن لدينا نظامًا ميكانيكيًّا بالأسفل مكوّنًا من كتلتين نقطيتين (m1 و m2) مثبتتين على الطرفين الحرين لقضيب كتلته **M**وطوله $2L$. هذا النظام حركة دورانية بالنسبة إلى النقطة A أو النقطة الثابتة A. احسب طاقة الحركة وطاقة الوضع للنظام الشكل 1.3

الحل :يتكون النظام من 3 كتل، لذلك هناك 3 طاقات حركية و3 طاقات كامنة 1- الطاقة الحركية KE

$$KE_{Tot} = KE_M + KE_m + KE_{m'}$$

$$KE_M = \frac{1}{2} J_{M/A} \theta^2$$

$$J_{M/A} = \frac{1}{12} M(2L^2) + M(AG)^2$$

$$AG = \frac{L}{2}$$

$$J_{M/A} = \frac{1}{12} M(2L^2) + M(\frac{L}{2})^2 = \frac{7}{12} ML^2$$

$$\Rightarrow KE_M = \frac{1}{2}\frac{7}{12} ML^2 \theta^2$$

$$T_m = \frac{1}{2} J_{m/A} \theta^2$$

$$J_{m/A} = [0 + md^2]$$

$$d = L + \frac{L}{2} = \frac{3L}{2}$$

$$J_{m/A} = m\left(\frac{3L}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow T_m = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{9}m\right]L^2\theta^2$$

$$T_{m'} = \frac{1}{2}J_{m'/A}\theta^2$$

$$J_{m'/A} = [0 + m'd^2]$$

$$d = \frac{L}{2}$$

$$J_{m'/A} = m'\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow T_{m'} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}m'\right]L^2\theta^2$$

$$T_{Tot} = \frac{1}{2}\frac{7}{12}ML^2\theta^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{4}{9}m\right]L^2\theta^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{4}{9}m'\right]L^2\theta^2$$

$$\Rightarrow T_{Tot} = \frac{1}{2}\left[\frac{7}{12}M + \frac{9}{4}m + \frac{1}{4}m'\right]L^2\theta^2$$

2- الطاقة الكامنة PE

$$PE_{Tot} = PE_M + PE_m + PE_{m'}$$

$$PE_M = Mgx$$

$$x = \frac{1}{2}L\sin\theta$$

$$PE_M = \frac{1}{2}MgL\sin\theta$$

$$PE_m = mghh = d\sin\theta = \frac{3}{2}L\sin\theta$$

$$PE_m = \frac{3}{2}mgL\sin\theta$$

$$PE_{m'} = -m'gh'$$

$$h' = \frac{d}{3}\sin\theta = \frac{1}{2}L\sin\theta$$

$$PE_{m'} = -\frac{1}{2}m'gL\sin\theta$$

$$PE_{Tot} = \frac{1}{2}MgL\sin\theta + \frac{3}{2}mgL\sin\theta - \frac{1}{2}m'gL\sin\theta$$

$$PE_{Tot} = \frac{1}{2} g L \sin\theta (M + 3m - m')$$

3.0.1 شروط التوازن

يتم تعيين شروط التوازن إذا كان التوازن

$$F = 0$$

$$x = x_0 \Rightarrow F \big|_{x=x_0}$$

بالنسبة للقوة المشتقة من كمون :

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

يتم كتابة حالة التوازن على النحو التالي:

$$\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = 0 \tag{11}$$

هناك نوعان من التوازن:

i) حالة التوازن المستقرة: بمجرد إزاحة النظام من موضع توازنه، فإنه يعود إليه. وفي هذه الحالة تكون قوة الاستعادة:

$$f = -C_x$$

with

0 ≻ C

$$C = -\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{13}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=x_0} > 0 \tag{14}$$

إن حالة التوازن المستقر هذه هي حالة التذبذب.

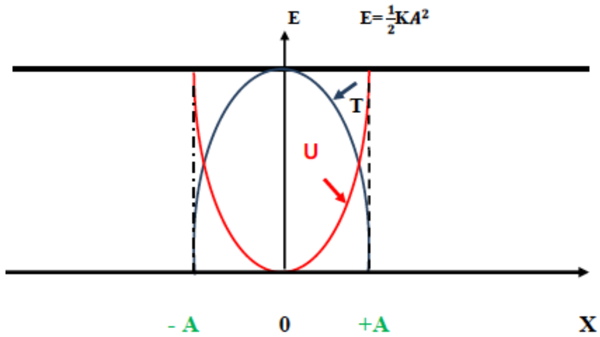
حالة التوازن غير المستقرة:
لا يعود النظام إلى حالة التوازن عند إزاحته. في هذه الحالة، تُكتب حالة التوازن غير المستقرة على النحو التالي:

$$\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x=x_0} < 0 \tag{15}$$

في حالة الدوران نستبدل:

$$x \rightarrow \theta$$

$$x_0 \rightarrow \theta_0$$



شكل 4.1: تغير الطاقة كدالة للإزاحة

من الممكن تمثيل تطور ثلاث طاقات بيانياً: الطاقة الكامنة، والطاقة الحركية، والطاقة الكلية (الميكانيكية)، الشكل 1-4.

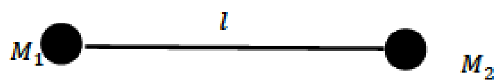
تعريف 3

عندما تنخفض الطاقة الحركية، ترتفع الطاقة الكامنة، والعكس صحيح. وتُعرف هذه الظاهرة بقانون حفظ الطاقة الكلية في النظام.

4.0.1 صياغة لاغرانج

الإحداثيات المعممة

الإحداثيات المعممة هي مجموعة من الإحداثيات الحقيقية المستقلة أو المرتبطة التي تتيح وصف وتكوين جميع عناصر النظام في أي وقت t.



شكل 5.1: مثال

مثال

يمكن تحديد موقع النقطة M في الفضاء بواسطة 3 إحداثيات على طول المحاور (x, y, z)
يمكن تعريف موضع جسم صلب في الفضاء بستة إحداثيات:

1. 03 إحداثيات تتعلق بمركز الثقل

2. 03 إحداثيات تتعلق بزوايا أويلر (θ, ϕ, ψ)

نرمز بـ $q_1(t), q_2(t), q_3(t)....q_N(t)$: الإحداثيات المعممة.
$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3.....\dot{q}_N$: السرعات المعممة.

درجة الحرية

هي عدد الإحداثيات المستقلة اللازمة لتحديد موضع كل عنصر من عناصر النظام أثناء حركته في أي وقت: نكتب:

$$d = N - r \tag{16}$$

حيث:
d : درجة الحرية
N : عدد الإحداثيات المعممة
r : عدد العلاقات بين الإحداثيات المعممة (عدد القيود)

مثال: لنعتبر نظامًا ميكانيكيًا يتكون من نقطتين M_1 و M_2 مرتبطتين بقضيب طوله L. أوجد عدد درجات الحرية.

$$\begin{cases} M_1(x_1, y_1, z_1) \\ M_2(x_2, y_2, z_2) \end{cases} \Rightarrow N = 6$$

$$l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = Cst \Rightarrow r = 1$$

إذن:

$$d = N - r = 6 - 1 = 5 \rightarrow d = 5$$

صياغة لاغرانج

تعتمد هذه الصياغة على دالة لاغرانج

$$L = KE - PE$$

مجموعة معادلات الحركة تُكتب كالتالي:

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \right\} = 0 \tag{17}$$

حيث:

L دالة لاغرانج

KE الطاقة الحركية للنظام

PE الطاقة الكامنة للنظام

q_i الإحداثي المعمم وهو السرعة المعممة للنظام.

لنظام ذو درجة حرية واحدة ($N = 1$ أو $dof = 1$):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q} \right) = 0$$

[1]

[1] لنظام أحادي الأبعاد، تُكتب معادلة لاغرانج كالتالي:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right) = 0$$

لحركة دورانية θ:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right) = 0$$

WAVES AND VIBRATIONS

Mohamed Salah Benlatreche

Dissertation Committee:
Committe Member 1, Chair
Committe Member 2
Committe Member 3
Committe Member 4

Portland State University
November 2024

A dissertation proposal in partial fulfillment for the degree of Doctor of Philosophy in Computer Science

Abstract

Teaching objectives Introduce the student to the phenomena of mechanical vibrations restricted to low amplitude oscillations for 1 or 2 degrees of freedom as well as to the study of the propagation of mechanical waves. Recommended prior knowledge : 1st year Mathematics and Physics concepts

Contents

List of Figures

List of Tables

Chapter 1

Vibrations

1.1 GENERALITIES “Introduction to Lagrange’s equations

1.1.1 General information on vibrations

1.1.1.1 Definition of a periodic movement

A movement is said to be periodic if it repeats identically to itself during equal intervals of time.

Examples: The movement of revolution of the Moon: The moon makes a complete cycle of revolution around the earth in approximately 29 days.

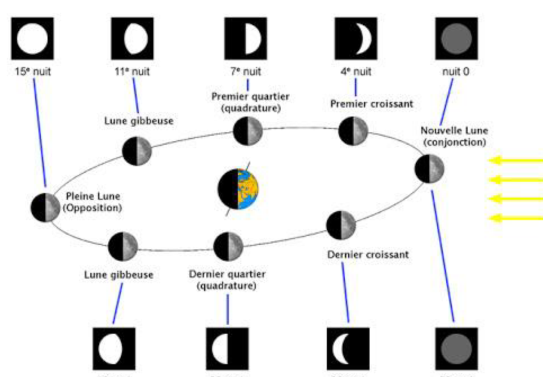


Figure 1.1: Movement of revolution of the moon

Heartbeats: the heartbeat is a succession of contractions and relaxations of the cardiac muscles that activate valves and cause the circulation of blood in the body.

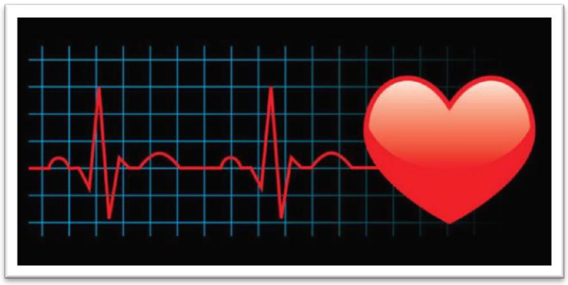


FIGURE 1.2: Electrocardiogram

1.1.1.2 Definition of an oscillation

Oscillation: any movement of a body that moves alternately from one side to the other from an equilibrium position. Oscillation refers to any repetitive motion around an equilibrium point. It can occur in mechanical systems (like a pendulum) or in other systems, such as electrical circuits (AC current) or biological rhythms. - Type of Motion: Oscillations typically describe smooth, periodic motions where the system swings back and forth in a regular pattern. - Examples: - A pendulum swinging back and forth. - The oscillation of an electrical signal in an alternating current (AC). - Seasonal cycles in nature or heartbeats in biology. - Broader Context : Oscillation can occur in “physical, chemical, electrical, or biological systems”. It may or may not involve physical movement; for example, **light waves** oscillate but do not ”vibrate” in the mechanical sense.

1.1.1.3 Subdivided of Oscillations:

Free oscillations an oscillator is free if it oscillates without external interventions (without friction) during its return to equilibrium -Damped oscillations the oscillator is subjected to friction forces that dissipate energy the oscillation damps and eventually stops. -Forced oscillations an oscillator is forced if an external action communicates energy to it. -Damped forced oscillations the external periodic force (excitation) compensates for the losses of snow removal by friction, the oscillations thus maintained do not dampen.

1.1.1.4 Definition of vibration:

Definition: Vibration specifically refers to the rapid, mechanical oscillations of a material or object. It involves the back-and-forth movement of particles or structures, often in response to an external force. - Type of Motion: Vibration is generally associated with fast, small-amplitude movements around an equilibrium position, often creating sound or heat as energy dissipates. - Examples: - The vibration of a guitar string when plucked. - The shaking of a mobile phone during a notification. - The vibrating motion of an engine or machinery. - Mechanical Nature: Vibration typically involves **mechanical systems** and is usually associated with physical objects. It is a subset of oscillation, specifically relating to mechanical systems.

1.1.1.5 Key differences:

1. Scope:
   - Oscillation is a more general term and can apply to any repetitive motion (mechanical, electrical, biological, etc.).
   - Vibration specifically refers to mechanical oscillations of a structure or object.

2. Speed and Amplitude:
   - Vibration is often faster and involves smaller movements, whereas oscillation can be slower and cover a larger range of motion.

3. Systems:
   - Oscillation applies to systems as varied as electrical circuits and mechanical objects.
   - Vibration is usually limited to mechanical or physical systems.
   - Oscillation is a general concept of periodic motion, applicable to various systems.

- Vibration is a specific type of oscillation that refers to the mechanical movement of objects.

1.1.1.6 Definition of a periodic motion

Periodic motion is a type of motion that repeats itself at regular intervals of time. In other words, an object in periodic motion returns to the same position and state after a fixed time period, known as the period. - Examples: The swinging of a pendulum, the vibration of a guitar string, the orbit of planets around the sun, and the oscillations of a mass on a spring.

Mathematical Form:
- Periodic motion is often described mathematically by sine or cosine functions, which reflect the repetitive nature of the movement. For fast motions we use the frequency (f) expressed in hertz (HZ) it is related to the period by:

$$f = \frac{1}{T} \tag{1.1}$$

The number of revolutions per second is called pulsation ω (noted , measured in rad/s)

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \tag{1.2}$$

1Hz = 1 period per second
1KHz $= 10^3 Hz$
$1MHz = 10^6 Hz$
$1GHz = 10^9 Hz$

Note:
1. An oscillator is said to be harmonic if the system evolves according to a periodic law of sinusoidal form (Figure 1-3).

$$x(t) = A\cos(t + \varphi) \tag{1.3}$$

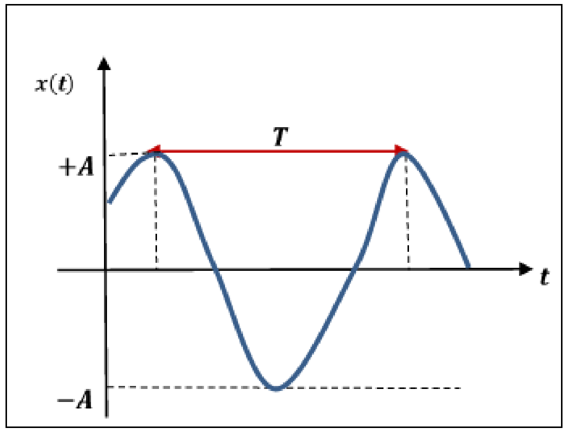


FIGURE 1.3: Representation of a harmonic oscillation

A: Amplitude of the oscillation (Maximum value of the displacement)

ω : Pulsation of the oscillation

φ : the initial phase (t = 0)

Speed: v The speed of the oscillating point M is the derivative of its displacement.

2- The oscillator is said to be non-harmonic if the system evolves according to a periodic law of any non-sinusoidal form figure 1.4.

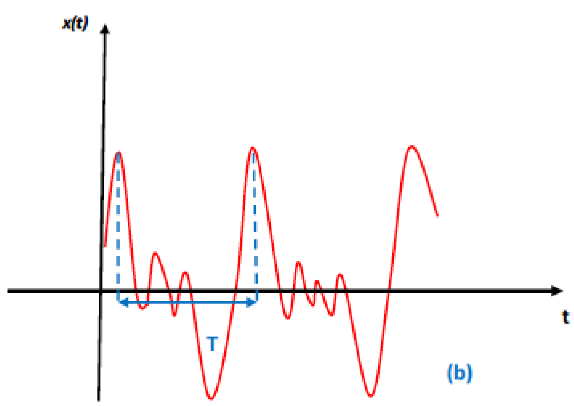


FIGURE 1.4: Representation of an anharmonic oscillation

1.1.2 Concept of energy

Key Concepts of Energy in Vibration and Oscillation:] The concept of energy in vibration and oscillation involves the continuous exchange between two primary forms of mechanical energy: kinetic energy (KE) and potential energy (PE). In systems undergoing vibration or oscillation, energy moves back and forth between these two forms as the object or system moves through its cycle.

Key Concepts of Energy in Vibration and Oscillation:

1.1.2.1 Total Mechanical Energy:

The total mechanical energy in a vibrating or oscillating system remains constant (assuming no energy loss due to friction or damping). This energy is the sum of kinetic and potential energy at any given point in the motion.

$$E_{Tot} = KE + PE = Const \tag{1.4}$$

1.1.2.2 Kinetic Energy (KE):

Kinetic energy is the energy of motion. It is at its maximum when the object moves the fastest, which typically occurs when the object passes through its equilibrium position (the center of its motion).
Formula for kinetic energy:

$$KE = \frac{1}{2}mv^2 \tag{1.5}$$

$$v = \frac{\partial x}{\partial t} = \dot{x} \tag{1.6}$$

$$\Rightarrow KE = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \tag{1.7}$$

Where m is the mass of the object and v is its velocity.
- In an oscillating system, kinetic energy is highest when the velocity is greatest and zero at the turning points of motion.

1.1.2.3 Potential Energy (PE):

- Potential energy is the energy stored due to the position or configuration of the object. In oscillating systems, this can be elastic potential energy (in springs) or gravitational potential energy (in pendulums). - In an oscillating system, potential energy is maximum when the object is at the extreme points of its motion (the turning points) and zero at the equilibrium position. - Formula for potential energy in a mass-spring system:

$$PE = \frac{1}{2}kx^2 \tag{1.8}$$

Where k is the spring constant and x is the displacement from the equilibrium position.

1.1.2.4 Energy Exchange:

- During the motion, there is a continuous exchange between kinetic and potential energy.
- At the equilibrium position, the velocity is at its maximum, so kinetic energy is maximum and potential energy is zero.
- At the extreme points of the motion (maximum displacement), the velocity is zero, so kinetic energy is zero and potential energy is maximum.
- This energy transfer is what drives the oscillation or vibration.
- Damping and Energy Loss:
- In real systems, damping (due to friction or air resistance) can cause energy loss in the form of heat, leading to a gradual decrease in the amplitude of the oscillation.
- In a damped system, total mechanical energy decreases over time, eventually bringing the motion to a stop.

Examples:

- Simple Harmonic Oscillator: In a mass-spring system, the mass moves back and forth, converting potential energy stored in the spring into kinetic energy and vice versa.

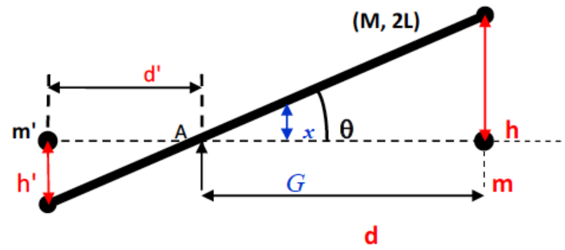


FIGURE 1.5: Double pendulum

- Pendulum: In a pendulum, gravitational potential energy and kinetic energy exchange as the pendulum swings from side to side.
- Vibration of a string: When a guitar string vibrates, the tension in the string stores potential energy, while the motion of the string translates that into kinetic energy.

Practical example Consider a mechanical system figure 1.5, below made up of two point masses (m and m') fixed to the free ends of a rod of mass M and length 2L. This system is a rotational movement relative to or fixed point A. Calculate the kinetic energy and the potential energy of the system: Solution : The system is made up of 3 masses, so there are 3 kinetic energies and 3 potential energies:

1- The kinetic energy KE

$$KE_{Tot} = KE_M + KE_m + KE_{m'}$$

$$KE_M = \frac{1}{2} J_{M/A} \theta^2$$

$$J_{M/A} = \frac{1}{12} M(2L^2) + M(AG)^2$$

$$AG = \frac{L}{2}$$

$$J_{M/A} = \frac{1}{12} M(2L^2) + M(\frac{L}{2})^2 = \frac{7}{12} ML^2$$

$$\Rightarrow KE_M = \frac{1}{2}\frac{7}{12}ML^2\theta^2$$

$$T_m = \frac{1}{2}J_{m/A}\theta^2$$

$$J_{m/A} = [0 + md^2]$$

$$d = L + \frac{L}{2} = \frac{3L}{2}$$

$$J_{m/A} = m\left(\frac{3L}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow T_m = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{9}m\right]L^2\theta^2$$

$$T_{m'} = \frac{1}{2}J_{m'/A}\theta^2$$

$$J_{m'/A} = [0 + m'd^2]$$

$$d = \frac{L}{2}$$

$$J_{m'/A} = m'\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow T_{m'} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}m'\right]L^2\theta^2$$

$\mathrm{T}_{Tot} = \frac{1}{2}\frac{7}{12}ML^2\theta^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{4}{9}m\right]L^2\theta^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{4}{9}m'\right]L^2\theta^2$

$$\Rightarrow T_{Tot} = \frac{1}{2}\left[\frac{7}{12}M + \frac{9}{4}m + \frac{1}{4}m'\right]L^2\theta^2$$

2- The Potential energy PE

$$PE_{Tot} = PE_M + PE_m + PE_{m'}$$

$\mathrm{PE}_M = Mgx$

$$x = \frac{1}{2} L \sin\theta$$

$\mathrm{PE}_M = \frac{1}{2} MgL\sin\theta$

$\mathrm{PE}_m = mgh$
h= $\mathrm{d}\sin\theta = \frac{3}{2} L \sin\theta$

$\mathrm{PE}_m = \frac{3}{2} mgL\sin\theta$

$$PE_{m'} = -m'gh'$$
$$h' = \frac{d}{3}\sin\theta = \frac{1}{2} L\sin\theta$$

$\mathrm{PE}_{m'} = -\frac{1}{2} m'gL\sin\theta$

$\mathrm{PE}_{Tot} = \frac{1}{2} MgL\sin\theta + \frac{3}{2} mgL\sin\theta - \frac{1}{2} m'gL\sin\theta$
$\mathrm{PE}_{Tot} = \frac{1}{2} gL\sin\theta(M + 3m - m')$

1.1.2.5 Equilibrium Conditions

The equilibrium condition set if the equilibrium

$$F = 0$$

if

$$x = x_0 \Rightarrow F \Big|_{x=x_0}$$

For a force derived from a potential,

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

The equilibrium condition is written as:

$$\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x=x_0} = 0 \tag{1.11}$$

There are two types of equilibrium:

1. Stable Equilibrium :
   Once the system is displaced from its equilibrium position, it returns to it. In this case, the restoring force is:

$$f = -C_x$$

with
C $\succ$ 0

$$C = -\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x=x_0} > 0 \tag{1.14}$$

This condition of stable equilibrium is the condition for oscillation.

2- Unstable Equilibrium :

The system does not return to its equilibrium when displaced. In this case, the unstable equilibrium condition is written as:

$$\frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x=x_0} < 0 \tag{1.15}$$

In the case of rotation, we replace:

$$x \rightarrow \theta$$

$$x_0 \rightarrow \theta_0$$

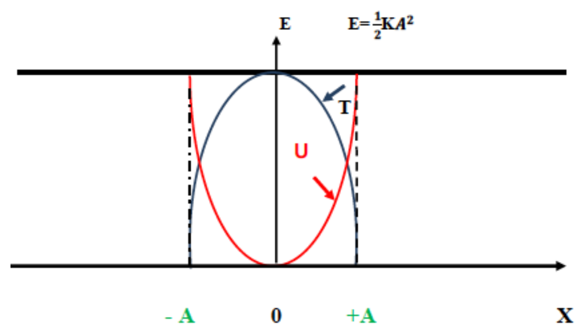


FIGURE 1.6: the variation of energies as a function of displacement

It is possible to graphically represent the evolution of three energies : potential energy kinetic energy and total (mechanical) energy, The figure1-6 . [1]

[1]When kinetic energy decreases, potential energy increases, and the opposite is also true. This phenomenon is known as the conservation of total energy in a system.

1.1.3 Lagrange Formalism

1.1.3.1 Generalized Coordinates

Generalized coordinates are the set of independent or related real viable coordinates allowing to describe and configure all the elements of a system at any time t.

1.1.3.2 Exemple

The position of a point M in space can be determined by 3 coordinates Along the axes (x, y, z)
The position of a solid body in space can be defined by six coordinates:

1. 03 coordinates relative to the center of gravity

2. 03 coordinates related to the Euler angles (θ, ϕ, ψ)

We designate by $q_1(t), q_2(t), q_3(t)....q_N(t)$**: The generalized coordinates.**
$\dot{q_1}, \dot{q_2}, \dot{q_3}.....\dot{q_N}$**: The generalized speeds.**

1.1.3.3 Degree of freedom

This is the number of independent coordinates needed to determine the position of each element of a system during its motion at any time: We write:

$$d = N - r \tag{1.16}$$

with:
d : Degree of freedom
N :Generalized number of coordinates
r :Number of relations, between the generalized coordinates (number of links)
Exemple: let a mechanical system consist of two points M_1 and M_1 connected by a rod of length L. Find the number of degrees of freedom.

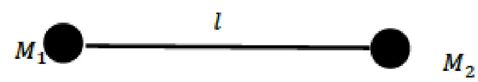


Figure 1.7: Exemple

$$\begin{cases} M_1(x_1, y_1, z_1) \\ M_2(x_2, y_2, z_2) \end{cases} \Rightarrow N = 6$$

$$l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = Cst \Rightarrow r = 1$$

so :

$$d = N - r = 6 - 1 = 5 \rightarrow d = 5$$

1.1.3.4 Lagrange formalism

This formalism is based on the Lagrange function

$$L = KE - PE$$

The set of equations of motion is written as:

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \right\} = 0 \tag{1.17}$$

Where:
L: Lagrange Function or Lagrangian;
KE The Kinetic Energy of the System;
PE The Potential Energy of the System;
q_i The generalized coordinate and is the generalized velocity of the system.
For a system with one degree of freedom (N=1 or dof=1)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial q}\right)=0$$

For a one-dimensional system, Lagrange's equation is written as :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)=0$$

For a rotational movement θ :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right)=0$$