

Centre universitaire Abdalhafid Boussouf- Mila

Matière: Equation de la physique mathématique.
3^{ème} année math, S5

Série N°1

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 .

1. On définit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(t) = f(2 + 2t, 5t)$.
- Démontrer que g est C^1 et calculer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f .
2. On définit $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par $h(u, v) = f(uv, u^2 + v^2)$
- Démontrer que h est C^1 et exprimer les dérivées partielles $\frac{\partial h}{\partial u}$ et $\frac{\partial h}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ ($x = uv, y = u^2 + v^2$).

Exercice 2 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ solution des systèmes suivants

$$1 \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = xy^2 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = yx^2 \end{array} \right. \quad 2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^x y \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y \end{array} \right. \quad 3 \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = x^2 y \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = xy^2 \end{array} \right. .$$

Exercice 3 Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 , telle que

$$\forall (x, y, t) \in \mathbb{R}^3, f(x+t, y+t) = f(x, y).$$

- 1- Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0.$$

- 2- On pose $u = x + y, v = x - y$ et $F(u, v) = f(x, y)$. Montrer que $\frac{\partial F}{\partial u} = 0$.

Exercice 4 Résoudre :

- 1) $\frac{dx}{(x(y-z))} = \frac{dy}{(y(z-x))} = \frac{dz}{(z(x-y))}.$
- 2) $\frac{dx}{(x(az-by))} = \frac{dy}{(y(cx-az))} = \frac{dz}{(z(by-cx))}.$
- 3) $\frac{dx}{x^2+y^2} = \frac{dy}{2xy}.$

Exercice 5 Résoudre les équations :

- 1) $x \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + 2(y-a) \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f(x, y)$
- 2) $x \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \alpha \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0$
- 3) $x(y-f(x,y)) \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + y(f(x,y)-x) \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = (x-y)f(x,y).$

Exercice 6 Soit $z(x, y)$ de classe C^1 , Déterminer la solution vérifiant l'équation:

$$yz \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} + xz \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = -2xy$$

et passant par la circonférence : $x^2 + y^2 = 16, z = 3$.