أولا: مراجعة قواعد أساسية في الرياضيات

1- الأسس:

$x^a . x^b = x^{a+b} \Rightarrow x^2 . x^5 = x^{2+5} = x^7$

$\frac{x^a}{x^b} = x^a . x^{-b} \Rightarrow \frac{x^8}{x^2} = x^8 . x^{-2} = x^{8-2} = x^6$

$(x^a)^b = x^{ab} \Rightarrow (x^3)^2 = x^{3\times 2} = x^6$

$(xy)^a = x^a . y^a \Rightarrow (xy)^3 = x^3 . y^3$

$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a} \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^5 = \frac{x^5}{y^5}$

$\frac{1}{x^a} = x^{-a} \Rightarrow \frac{1}{4^2} = 4^{-2}$

$\frac{1}{x^{-a}} = \frac{1}{\frac{1}{x^a}} \Rightarrow 1.\frac{x^a}{1} = x^a \Rightarrow \frac{1}{4^{-2}} = \frac{1}{\frac{1}{4^2}} = 4^2$

$x^0 = 1 \Rightarrow 4^0 = 1$

2- ضرب وقسمة الحدود:

$\mathbf{20x^4 . 7y^6} = 140x^4y^6$

$\mathbf{6x^2y^3 . 8x^4y^6} = 48x^2x^4y^3y^6 = 48x^{2+4}y^{3+6} = 48x^6y^9$

$\mathbf{12x^3y^2 . 5y^4z^5} = 60x^3y^2y^4z^5 = 60x^3y^{2+4}z^5 = 60x^3y^6z^5$

$\mathbf{3x^3y^2z^5 . 15x^4y^3z^4} = 45x^3x^4y^2y^3z^5z^4 = 45x^{3+4}y^{2+3}z^{5+4} = 45x^7y^5z^9$

$$\frac{\mathbf{24x^5y^3z^7}}{\mathbf{6x^3y^2z^4}} = \frac{\mathbf{4x^5y^3z^7}}{\mathbf{x^3y^2z^4}} = 4x^5y^3z^7 . x^{-3}y^{-2}z^{-4} = 4x^5x^{-3}y^3y^{-2}z^7z^{-4}$$

$$= 4x^{5-3}y^{3-2}z^{7-4} = 4x^2yz^3$$

أو هذه العملية عن طريق الاختزال:

$$\frac{24x^5y^3z^7}{6x^3y^2z^4} = \frac{24x^{3+2}y^{2+1}z^{3+4}}{6x^3y^2z^4} = \frac{24\cancel{x^3}x^2\cancel{y^2}y^1z^3\cancel{z^4}}{6\cancel{x^3}\cancel{y^2}\cancel{z^4}} = 4x^2yz^3$$

$$\frac{\mathbf{35x^2y^7z^5}}{\mathbf{5x^6y^4z^8}} = \frac{\mathbf{7x^2y^7z^5}}{\mathbf{x^6y^4z^8}} = 7x^2y^7z^5 . x^{-6}y^{-4}z^{-8} = 7x^2x^{-6}y^7y^{-4}z^5z^{-8}$$

$$= 7x^{2-6}y^{7-4}z^{5-8} = 7x^{-4}y^3z^{-3} = \frac{7y^3}{x^4z^3}$$

أو هذه العملية عن طريق الاختزال:

$$\frac{35x^2y^7z^5}{5x^6y^4z^8} = \frac{35x^2y^{4+3}z^5}{5x^{2+4}y^4z^{5+3}} = \frac{\cancel{35}\cancel{x^2}\cancel{y^4}y^3\cancel{z^5}}{\cancel{5}\cancel{x^2}x^4\cancel{y^4}\cancel{z^5}z^3} = \frac{7y^3}{x^4z^3}$$

3- الكسور:

ليكن $A = 1$، $B = 2$، $C = 3$، $D = 4$، و منه:

$$\frac{A}{B} . \frac{C}{C} = \frac{A}{B} \Rightarrow \frac{1}{2} . \frac{3}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{A}{B} . \frac{D}{C} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} . \frac{4}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2\times2}{2\times3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{A}{B} . \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD} = \frac{1}{2} . \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

– **اذا ضرب البسط والمقام لكسر ما بنفس العدد غير الصفري أو بكثيرة حدود فان قيمة الكسر لا تتغير.**

$$\frac{2}{3} . \frac{x}{x} = \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

– **اذا قسم البسط والمقام لكسر ما بنفس العدد غير الصفري أو بكثيرة حدود فان قيمة الكسر لا تتغير.**

$$\frac{\frac{2}{x}}{\frac{3}{x}} = \frac{2}{x} . \frac{x}{3} = \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

– **عند ضرب كسرين فإنه يتعين علينا أن ضرب البسطين والمقامين بشكل منفصل:**

$$\frac{5}{x+6}.\frac{x-9}{x-4}=\frac{5(x-9)}{(x+6)(x-4)}=\frac{5x-45}{x^2+2x-24}$$

– **في حالة قسمة الكسور، فإن الكسر الذي هو في المقام نحوله إلى مقلوب ونضربه في الكسر الذي في البسط.**

$$\frac{\frac{16}{y}}{\frac{7}{y^2-3}}=\frac{16}{y}.\frac{y^2-3}{7}=\frac{16(y^2-3)}{(y)(7)}=\frac{16y^2-48}{7y}$$

– **نستطيع أن نجمع أن نطرح الكسور إذا كان لها فقط نفس المقام والذي يسمى المقام المشترك، ونتذكر دائما أن كل الحدود تطرح من المجموعات المعطاة بين الأقواس.**

$$\frac{6x}{x+5}-\frac{4x+9}{x+5}=\frac{(6x)-(4x+9)}{x+5}=\frac{2x-9}{x+5}$$

$$\frac{6x}{x+5}+\frac{4x+9}{x+5}=\frac{(6x)+(4x+9)}{x+5}=\frac{10x+9}{x+5}$$

– **في حالة جمع أو طرح الكسور التي لها مقامات مختلفة:**

$$\frac{x}{5}-\frac{3}{7x}=\frac{(x)(7x)-(5)(3)}{(5)(7x)}=\frac{7x^2-15}{35x}$$

أو:

$$\frac{x}{5}-\frac{3}{7x}=\left(\frac{x}{5}.\frac{7x}{7x}\right)-\left(\frac{3}{7x}.\frac{5}{5}\right)=\frac{7x^2}{35x}-\frac{15}{35x}=\frac{7x^2-15}{35x}$$

4- الجذور: إن رمز $\sqrt{\ }$ اسمه الجذر التربيعي أي أصله $\sqrt[2]{\ }$ولكن فقط عند كتابته لا يكتب العدد 2،يعني: $\sqrt{\ }=\sqrt[2]{\ }$

$$\sqrt[2]{x}=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$$

أي:

$$\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}\Rightarrow\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}},\sqrt[4]{x}=x^{\frac{1}{4}}$$

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n=\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n=x^{\frac{n}{n}}=x\Rightarrow\left(\sqrt[3]{27}\right)^3=\left(27^{\frac{1}{3}}\right)^3=27^{\frac{3}{3}}=27$$

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}} \Rightarrow \frac{\sqrt[4]{1782}}{\sqrt[4]{22}} = \sqrt[4]{\frac{1782}{22}} = \sqrt[4]{81} = 81^{\frac{1}{4}}$$

$$\sqrt[n]{x}.\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy} \Rightarrow \sqrt{8}.\sqrt{18} = \sqrt{8.18} = \sqrt{144} = 12$$

5- قواعد التفاضل: التفاضل هو عملية إيجاد مشتقة دالة:

لتكن لدينا الدالة $y = f(x)$، فإن مشتقة الدالة عند x يرمز لها بأحد الرموز التالية:

$(\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{dy}{dx}, y', f'(x))$ ومنه قواعد الاشتقاق تتمثل في:

– إذا كانت $f(x) = K$، حيث K ثابت فإن مشتقة الدالة $f(x) = K$ بالنسبة لـx تساوي الصفر (أي مشتق عدد ثابت يساوي الصفر).

$$f(x) = 6 \Rightarrow f'(x) = 0$$

تمرين حول الاشتقاق

أوجدّ الدول المشتقة للدوال التالية:

1/ $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2$

2/ $f(x) = x^5 + \frac{1}{2}x^4 - 3x^3 + x^2 + 4x$

3/ $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$

4/ $f(x) = (x^2 - 3x + 5)^7$

5/ $f(x) = \frac{1}{(x^2 - 2x + 2)^4}$

6/ $f(x) = (\frac{x+2}{3x+4})^3$

7/ $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$

8/ $f(x,y) = \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}y^3 + 3x^2 - 5y + 7$

9/ $f(x,y) = \frac{1}{2}x^{\frac{5}{3}}y^{\frac{3}{4}}$

الحل:

1/ $f'(x)=(x^4-3x^3+2)'=4x^3-9x^2$

وهذا من أجل: $x\in\mathbb{R}$

2/ $f'(x)=5x^4+2x^4-9x^2-2x+4$

3/ $f(x)=\sqrt{x^2-2x+2}$

ملاحظة: مشتق الدالة: $\sqrt{f(x)}$: إذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق على المجال I من $\mathbb{R}$ وكانت $f(x)$ موجبة تماما فإن: $\boxed{\sqrt{f(x)}' = \frac{f(x)'}{2\sqrt{f(x)}}}$ لدينا: $(x^2-2x+2)\succ 0$ لأن $(\Delta\succ 0)$ ومنه:

$$f(x)'=\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+2}}=\frac{\cancel{2}(x-1)}{\cancel{2}\sqrt{x^2-2x+2}}$$
$$\Rightarrow f(x)'=\frac{(x-1)}{\sqrt{x^2-2x+2}}$$

4/ $f(x)=(x^2-3x+5)^7$

ملاحظة: مشتق الدالة: $\left[f(x)\right]^n$: حيث $(n\geq 2, n\in\mathbb{N})$ من أجل n عدد طبيعي حيث $n\geq 2$ وكانت الدالة تقبل الاشتقاق على المجال I من $\mathbb{R}$ فإن: $\boxed{\left[f(x)\right]^{n\,\prime}=n\left[f(x)\right]^{n-1}.f(x)'}$ ومنه:

$$f(x)'=7(x^2-3x+5)^6.(2x-3)$$

5/ $f(x)=\dfrac{1}{(x^2-2x+2)^4}$

ملاحظة: مشتق الدالة $\dfrac{1}{\left[f(x)\right]^n}$ حيث: $n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 1$ وكانت $f(x)$ قابلة للاشتقاق على المجال I من $\mathbb{R}$ ولا تنعدم فإن: $\left(\dfrac{1}{\left[f(x)\right]^n}\right)'=\dfrac{-n.f(x)'}{f(x)^{n+1}}$ ومنه:

$$f(x)'=\frac{-4(2x-2)}{(x^2-2x+2)^5}=-\frac{8(x-1)}{(x^2-2x+2)^5}$$

6/ $f(x)=(\frac{x+2}{3x+4})^{3}$

$f(x)'=3(\frac{x+2}{3x+4})^{2}\cdot\frac{-2}{(3x+4)^{2}}$

$f(x)'=\frac{(x+2)^{2}}{(3x+4)^{4}}$

7/ $f(x)=\frac{x^{2}+1}{x-1}$

ملاحظة: مشتق الدالة: $H(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ حيث $g(x)\neq 0$ أي $x\neq 1$ فإن:

$f(x)'=\frac{2x(x-1)-(x^{2}+1)}{(x-1)^{2}}$

$=\frac{2x^{2}-2x-x^{2}-1}{(x-1)^{2}}=\frac{x^{2}-2x-1}{(x-1)^{2}}$

8/ $f(x,y)=\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}y^{3}+3x^{2}-5y+7$

أ- المشتقة الجزئية بالنسبة لـx : يرمز لها بالرمز: $\frac{\delta f(x,y)}{\delta x}$:

$\frac{\delta f(x,y)}{\delta x}=\frac{3}{4}x^{\frac{1}{2}}y^{3}+6x$

ب- المشتقة الجزئية بالنسبة لـ:x يرمز لها بالرمز: $\frac{\delta f(x,y)}{\delta y}$:

$\frac{\delta f(x,y)}{\delta y}=\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}3y^{2}-5\Rightarrow\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}y^{2}-5$

9/ $f(x,y)=\frac{1}{2}x^{\frac{5}{3}}y^{\frac{3}{4}}$

أ- المشتقة الجزئية بالنسبة لـx: يرمز لها بالرمز: $\frac{\delta f(x,y)}{\delta x}$:

$\frac{\delta f(x,y)}{\delta x}=\frac{5}{6}x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{3}{4}}$

ب- المشتقة الجزئية بالنسبة لـx: يرمز لها بالرمز: $\frac{\delta f(x,y)}{\delta y}$:

$$\frac{\delta f(x,y)}{\delta y} = \frac{1}{2} x^{\frac{5}{3}} \frac{3}{4} y^{-\frac{1}{4}} \Rightarrow \frac{3}{8} x^{\frac{5}{3}} y^{-\frac{1}{4}}$$