Suites de composition

Dans ce chapitre, nous démontrons le *théorème de Jordan-Hölder* et nous introduisons deux classes importantes de groupes : celle des *groupes résolubles* et celle des *groupes nilpotents*. Toute cette étude repose sur la notion de *suite de composition*.

1 — Théorème de Jordan-Hölder

A / *Suites de composition*

Nous désignons par G un groupe quelconque.

Définition (7.1) : On appellera *suite de composition de G* toute chaîne finie de sous-groupes G_i $(0 \leqslant i \leqslant n,\ n \in \mathbf{N}^*)$, du type :

$$G = G_0 \geqslant G_1 \geqslant \ldots \geqslant G_i \geqslant G_{i+1} \geqslant \ldots \geqslant G_n = (e) \qquad (1)$$

dans laquelle on a $G_{i+1} \lhd G_i$, quel que soit i $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$.

Les groupes $\dfrac{G_i}{G_{i+1}}$ sont appelés *quotients* de la suite de composition et n est sa *longueur* ($n =$ nombre des quotients de la suite).

Si, dans (1), on a $G_i \neq G_{i+1}$, quel que soit i $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$, on dit que la suite de composition est *strictement décroissante*.

Remarque (7.2) :

1° Une suite de composition, selon la définition (7.1), est appelée par certains auteurs : « suite normale ». Nous avons préféré réserver cette dernière appellation aux suites de composition telles que chaque G_i est normal dans G (définition (7.24)).

2° Tout groupe G a au moins une suite de composition : $G \geqslant (e)$.

3° Une généralisation de la définition (7.1) est la suivante :

Définition (7.3) : H étant un sous-groupe de G, on appellera *suite de composition de G vers H* toute chaîne finie de sous-groupes H_i $(0 \leqslant i \leqslant n, \ n \in \mathbf{N}^*)$, de la forme :

$$G = H_0 \geqslant H_1 \geqslant \dots \geqslant H_i \geqslant H_{i+1} \geqslant \dots \geqslant H_n = H \quad (2)$$

dans laquelle, pour tout i $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$, on a $H_{i+1} \lhd H_i$.

Les $\dfrac{H_i}{H_{i+1}}$ sont les *quotients* de la suite et n est sa *longueur.*

Définitions (7.4) : Soient Σ et Σ' deux suites de composition de G :

$$\Sigma : \qquad G = G_0 \geqslant G_1 \geqslant \dots \geqslant G_n = (e)$$

$$\Sigma' : \qquad G = K_0 \geqslant K_1 \geqslant \dots \geqslant K_p = (e).$$

1° On dit que Σ' est un *raffinement de* Σ, si $p \geqslant n$ et si la suite Σ est extraite de Σ'; c'est-à-dire s'il existe n entiers positifs : $j_0 < j_1 < \dots < j_n \leqslant p$ tels que, pour tout i $(0 \leqslant i \leqslant n)$, $G_i = K_{j_i}$. On pourra alors écrire : $\Sigma \subseteq \Sigma'$.

S'il existe un entier $j \in \{0, 1, \dots, p\}$ tel que $K_j \neq G_i$, quel que soit i $(0 \leqslant i \leqslant n)$, on dit que Σ' est un *raffinement propre* de Σ; dans ce cas, on a nécessairement $p > n$ et on écrira $\Sigma \subset \Sigma'$.

2° On dit que les suites de compositions Σ et Σ' sont *équivalentes*, si $n = p$ et s'il existe une permutation σ des entiers 0, 1, 2, ..., $n-1$, telle que, pour tout i $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$:

$$\frac{G_i}{G_{i+1}} \simeq \frac{K_{\sigma(i)}}{K_{\sigma(i)+1}}.$$

On exprimera l'équivalence des deux suites de composition par la notation : $\Sigma \sim \Sigma'$.

Remarque (7.5) : Toute suite extraite d'une suite de composition telle que Σ' n'est pas, en général, une suite de composition; car, pour $l > j+1$, on n'a pas nécessairement $K_l \lhd K_j$.

Théorème (7.6) (Schreier (¹)). *Soient Σ_1 et Σ_2 deux suites de composition d'un groupe G ; il existe alors deux suites de compositions Σ'_1 et Σ'_2 de G telles que :*

$$\Sigma_1 \subseteq \Sigma'_1, \quad \Sigma_2 \subseteq \Sigma'_2 \quad \text{et} \quad \Sigma'_1 \sim \Sigma'_2.$$

La démonstration de ce théorème s'appuie sur le lemme suivant :

Lemme (7.7) (Zassenhaus (²)). *Soient H, H', K et K' des sous-groupes de G tels que $H' \lhd H$ et $K' \lhd K$; on a alors :*

$$H'(H \cap K') \lhd H'(H \cap K), \quad K'(H' \cap K) \lhd K'(H \cap K) \qquad (3)$$

et
$$\frac{H'(H \cap K)}{H'(H \cap K')} \simeq \frac{K'(H \cap K)}{K'(H' \cap K)} \qquad (4)$$

Preuve : Des propriétés des sous-groupes normaux (chap. IV) on déduit les résultats suivants :

$$K' \lhd K \Rightarrow H \cap K' \lhd H \cap K$$

et
$$H' \lhd H \Rightarrow H' \cap K \lhd H \cap K,$$

d'où $\quad H'(H \cap K') \lhd H'(H \cap K) \quad$ et $\quad K'(H' \cap K) \lhd K'(H \cap K),$

ainsi que :

$$(H \cap K')(H' \cap K) \lhd H \cap K.$$

Pour démontrer (4), on va prouver que chacun des quotients de cette relation est isomorphe à $\dfrac{H \cap K}{(H \cap K')(H' \cap K)}$; pour cela, considérons la correspondance :

$$\varphi : H'(H \cap K) \to \frac{H \cap K}{(H \cap K')(H' \cap K)}$$
$$xy \mapsto \bar{y}$$

$x \in H'$, $y \in H \cap K$ et $\bar{y}$ est la classe de y modulo $(H \cap K')(H' \cap K)$.

(¹) O. Schreier, mathématicien allemand (1901-1929).

(²) H. J. Zassenhaus, mathématicien américain, d'origine allemande (lemme publié en 1934 [77]).

Vérifions que φ est une *application* : supposons $x' \in H'$, $y' \in H \cap K$ tels que $x'y' = xy$; on a alors $x^{-1}x' = yy'^{-1}$, donc $yy'^{-1} \in H' \cap K$ et par suite $\bar{y} = \bar{y}'$; d'où $\varphi(x'y') = \varphi(xy)$.

La définition de φ implique sa *surjectivité*. D'autre part, φ est un *morphisme de groupes* :

Soient x, x' dans H' et y, y' dans $H \cap K$,

$$xyx'y' = xyx'y^{-1}yy' \quad \text{et} \quad (H' \lhd H, y \in H) \Rightarrow yx'y^{-1} \in H';$$

en posant $x_1 = yx'y^{-1}$ on a $xyx'y' = xx_1yy'$, d'où

$$\varphi(xyx'y') = \varphi(xx_1yy') = \overline{yy'} = \bar{y}\,\bar{y}';$$

par suite, $\varphi(xyx'y') = \varphi(xy)\,\varphi(x'y')$.

Déterminons $\operatorname{Ker}\varphi$: soient $x \in H'$, $y \in H \cap K$,

$$xy \in \operatorname{Ker}\varphi \quad \Leftrightarrow \quad y \in (H \cap K')(H' \cap K)$$

d'où $\mathit{Ker}\,\varphi = H'(H \cap K')$, car $H' \cap K \leqslant H'$.

En appliquant le 1er théorème d'isomorphisme, on obtient :

$$\frac{H'(H \cap K)}{H'(H \cap K')} \simeq \frac{H \cap K}{(H \cap K')(H' \cap K)} \tag{5}$$

De la même façon, on montrerait que $\dfrac{K'(H \cap K)}{K'(H' \cap K)}$ est isomorphe au second quotient de la relation (5), d'où le lemme.

Démonstration du théorème (7.6) de Schreier

Soient :

$$\Sigma_1 : \qquad G = G_0 \geqslant G_1 \geqslant \ldots \geqslant G_n = (e)$$

$$\Sigma_2 : \qquad G = H_0 \geqslant H_1 \geqslant \ldots \geqslant H_p = (e).$$

Quels que soient i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ et j $(1 \leqslant i \leqslant p)$, posons :

$$G_{ij} = G_i(G_{i-1} \cap H_j) \qquad \text{et} \qquad H_{ji} = H_j(H_{j-1} \cap G_i) \tag{6}$$

Les G_{ij} sont des sous-groupes de G, car on a $G_i \lhd G_{i-1}$ et $G_{i-1} \cap H_j \leqslant G_{i-1}$; il en est de même pour les H_{ji}.

On a $G_{ip} = G_i$, $H_{jn} = H_j$ et quels que soient i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ et j $(1 \leqslant j \leqslant p)$,

$$G_{i-1} \geqslant G_{i1} \geqslant G_{i2} \geqslant \ldots \geqslant G_{ip} = G_i \tag{7}$$

$$H_{j-1} \geqslant H_{j1} \geqslant H_{j2} \geqslant \ldots \geqslant H_{jn} = H_j \tag{8}$$

on remarque que l'on peut écrire $G_{i-1} = G_{i0}$ et $H_{j-1} = H_{j0}$ et, compte tenu du lemme (7.7) de Zassenhaus, on a

$$G_{ij} \triangleleft G_{i,\,j-1}, \qquad H_{ji} \triangleleft H_{j,\,i-1} \tag{9}$$

et
$$\frac{G_{i,\,j-1}}{G_{ij}} \simeq \frac{H_{j,\,i-1}}{H_{ji}} \tag{10}$$

Soit Σ_1' la chaîne décroissante de sous-groupes de G, obtenue à partir de Σ, en intercalant entre G_{i-1} et G_i les sous-groupes G_{ij} $(1 \leqslant j \leqslant p)$ comme dans (7), pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$; d'après (9), Σ_1' est une suite de composition de G, sa longueur est np et c'est un raffinement de Σ_1.

On construit de même un raffinement Σ_2' de Σ_2 en intercalant entre H_{j-1} et H_j les sous-groupes H_{ji} $(1 \leqslant i \leqslant n)$, comme dans (8); Σ_2' est aussi de longueur np.

Σ_1' et Σ_2' sont donc de même longueur et, compte tenu de (10), on a $\Sigma_1' \sim \Sigma_2'$.

B / *Théorème de Jordan-Hölder* [3]

Définition (7.8) : Une suite de composition d'un groupe G sera appelée *suite de Jordan-Hölder* si tous les quotients de la suite sont des groupes simples. Cette appellation sera justifiée par le théorème (7.12) de Jordan-Hölder.

PROPOSITION (7.9). *Une suite de composition de* G *est une suite de Jordan-Hölder si et seulement si elle est strictement décroissante et n'admet aucun raffinement propre.*

Preuve : Soit

$$\Sigma : \qquad G = G_0 \geqslant G_1 \geqslant \ldots \geqslant G_i \geqslant G_{i+1} \geqslant \ldots \geqslant G_n = (e).$$

[3] C.-M. Jordan, mathématicien français (1838-1922); O. Hölder, mathématicien allemand (1859-1937).

$\dfrac{G_i}{G_{i+1}}$ simple $\Leftrightarrow$ $G_{i+1} \neq G_i$ et G_{i+1} normal maximal dans G, d'après la proposition (4.52). Cette dernière condition est équivalente à : quel que soit i $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$, il n'existe aucun sous-groupe H tel que $G_i > H > G_{i-1}$ et $H \triangleleft G_i$, d'où le résultat énoncé.

Remarques (7.10) :

1° Si Σ est une suite de Jordan-Hölder de G alors toute suite de composition Σ' équivalente à Σ est encore une suite de Jordan-Hölder de G.

En effet, tout quotient de Σ' est isomorphe à un quotient de Σ, donc il est simple.

2° Tout groupe n'admet pas nécessairement une suite de Jordan-Hölder. Par exemple, **Z** *n'admet pas de suite de Jordan-Hölder*. En effet, si on considère une suite de composition strictement décroissante de **Z** :

$$\mathbf{Z} > k_1 \mathbf{Z} > k_2 \mathbf{Z} > \ldots > k_n \mathbf{Z} > (0) \tag{11}$$

on peut toujours construire un raffinement propre de (11) en intercalant, par exemple, $2k_n \mathbf{Z}$ entre $k_n \mathbf{Z}$ et (0).

Nous montrons que tout groupe fini a une suite de Jordan-Hölder, mais il existe des groupes infinis qui ont une suite de Jordan-Hölder (exercice 5, chap. VII).

Notons cependant qu'*un groupe abélien n'a une suite de Jordan-Hölder que s'il est fini* et différent de (e).

En effet, supposons qu'un groupe abélien G ait une suite de Jordan-Hölder :

$$G = G_0 > G_1 > \ldots > G_n = (e).$$

Tous les quotients de la suite sont abéliens simples, donc ils sont cycliques d'ordre premier (proposition (4.9)).

Pour tout i $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$ posons $p_i = [G_i : G_{i+1}]$, les p_i sont des nombres premiers et

$$[G : G_n] = |G| = p_0 p_1 \ldots p_{n-1},$$

donc G est fini.

3° Tout groupe simple G admet une unique suite de composition strictement décroissante, qui est une suite de Jordan-Hölder : $G = G_0 > G_1 = (e)$.

Proposition (7.11). *Tout groupe fini* $G \neq (e)$ *admet une suite de Jordan-Hölder.*

Preuve : Soit un groupe fini $G \neq (e)$. Un groupe simple ayant une suite de Jordan-Hölder, on suppose G non simple. Soit $\mathscr{H}$ l'ensemble des sous-groupes *propres normaux* de G; cet ensemble est non vide et fini, car G est fini. Toute chaîne strictement croissante de sous-groupes de G appartenant à $\mathscr{H}$ est donc finie, par suite $\mathscr{H}$ contient au moins un élément maximal H_1; donc $\frac{G}{H_1}$ est simple.

Si H_1 est simple, alors $G > H_1 > (e)$ est une suite de Jordan-Hölder de G.

Si H_1 n'est pas simple, on considère l'ensemble non vide et fini $\mathscr{H}_1$ des sous-groupes propres et normaux de H_1. Le raisonnement vu plus haut montre que $\mathscr{H}_1$ contient au moins un élément maximal H_2, donc $\frac{H_1}{H_2}$ est simple.

Si H_2 est simple, alors $G > H_1 > H_2 > (e)$ est une suite de Jordan-Hölder, sinon on réitère la méthode précédente. Le nombre des sous-groupes de G étant fini, nécessairement, au bout d'un nombre fini, k, d'opérations on obtient un sous-groupe H_k simple de G tel que :

$$G > H_1 > H_2 > \dots > H_{k-1} > H_k > (e)$$

est une suite de Jordan-Hölder de G.

Théorème (7.12) (Jordan-Hölder). *Etant donné un groupe* G *admettant une suite de Jordan-Hölder, alors :*

1° *toute suite de composition strictement décroissante de* G *admet un raffinement qui est une suite de Jordan-Hölder ;*
2° *deux suites de Jordan-Hölder quelconques de* G *sont équivalentes.*

Preuve :

1° Par hypothèse, G admet une suite de Jordan-Hölder que nous notons Σ_0.

Soit, d'autre part, Σ une suite de composition strictement décroissante de G. D'après le théorème de Schreier, Σ et Σ_0 admettant des raffinements équivalents, Σ' et Σ'_0, respectivement. Mais Σ_0 n'ayant pas de raffinement propre, Σ'_0 est identique à Σ_0, d'où $\Sigma' \sim \Sigma_0$ et Σ' est donc une suite de Jordan-Hölder (remarque (7.10) 1°).

2° Compte tenu des notations précédentes, si Σ est aussi une suite de Jordan-Hölder de G, alors le raffinement Σ' de Σ est identique à Σ, d'où $\Sigma \sim \Sigma_0$.

Remarques (7.13) :

1° Dans le cas des groupes finis, on peut démontrer directement le théorème de Jordan-Hölder, sans utiliser le lemme de Zassenhaus, ni le théorème de Schreier [41].

3° D'après le théorème (7.12), pour un groupe G admettant une suite de Jordan-Hölder, deux telles suites quelconques ont la même longueur.

Définition (7.14) :

a) un groupe G admettant une suite de Jordan-Hölder de longueur n est dit de *longueur finie n*;
b) un groupe $G \neq (e)$ n'admettant pas de suite de Jordan-Hölder est dit de *longueur infinie*;
c) $G = (e)$ sera, par convention, *de longueur 0*.

Remarque (7.15) : Un groupe est simple si et seulement s'il est de longueur 1.

Exemples (7.16) : Pour le groupe symétrique S_4,

$$S_4 > A_4 > (e) \tag{12}$$

est une suite de composition, mais ce n'est pas une suite de Jordan-Hölder, car A_4 n'est pas simple.

D'après les résultats des exercices 9 et 10 (chap. IV), $K = \{e, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\}$ est normal dans A_4 et $H = \{e, (1, 2)(3, 4)\}$ est normal dans K, on en déduit un raffinement de (12) :

$$S_4 > A_4 > K > H > (e) \tag{13}$$

tel que $o\left(\frac{S_4}{A_4}\right) = 2$, $o\left(\frac{A_4}{K}\right) = 3$, $o\left(\frac{K}{H}\right) = 2$ et $o(H) = 2$; donc (13) est une suite de Jordan-Hölder et S_4 *est un groupe de longueur 4.*

Par contre, A_5 étant simple (exercice 6, chap. V), $S_5 > A_5 > (e)$ est une suite de Jordan-Hölder et S_5 *est un groupe de longueur 2.*

Proposition (7.17). *Soit* $H \triangleleft G$, *alors :*

$$\left(H \textit{ et } \frac{G}{H} \textit{ sont de longueur finie}\right) \Rightarrow G \textit{ est de longueur finie}$$

et $$\operatorname{long}(G) = \operatorname{long}(H) + \operatorname{long}\left(\frac{G}{H}\right).$$

Preuve : Soit

$$H = H_0 > H_1 > \dots > H_{r-1} > H_r = (e)$$

une suite de Jordan-Hölder de H

et $$\frac{G}{H} = \frac{G_0}{H} > \frac{G_1}{H} > \dots > \frac{G_{s-1}}{H} > \frac{G_s}{H} = (\bar{e})$$

une suite de Jordan-Hölder de $\frac{G}{H}$.

$$\frac{G_{i+1}}{H} \triangleleft \frac{G_i}{H} \quad \Leftrightarrow \quad G_{i+1} \triangleleft G_i, \quad \text{dans } G.$$

D'autre part, pour tout i $(0 \leqslant i \leqslant s-1)$, on a

$$\frac{\;\frac{G_i}{H}\;}{\frac{G_{i+1}}{H}} \simeq \frac{G_i}{G_{i+1}}, \qquad \text{donc } \frac{G_i}{G_{i+1}} \text{ est simple;}$$

de plus $G_s = H$, par suite,

$$G = G_0 > G_1 > \dots > G_{s-1} > H > H_1 > \dots > H_r = (e)$$

est une suite de Jordan-Hölder de G et sa longueur est $r + s$.

Proposition (7.18). *Quel que soit le nombre premier p, tout p-groupe fini G, d'ordre p^n, est de longueur n et tous les quotients d'une suite de Jordan-Hölder de G sont d'ordre p.*

Preuve :

— si $n = 1$, la propriété est vérifiée (voir remarques (7.10) et (7.15));
— supposons $n > 1$;
— si le groupe *G est abélien*, d'après le 1er théorème de Sylow, il existe un sous-groupe G_1 de G, d'ordre p^{n-1};

$$G \text{ abélien} \Rightarrow G_1 \lhd G \quad \text{et} \quad o\left(\frac{G}{G_1}\right) = p.$$

De même G_1 étant abélien d'ordre p^{n-1}, il existe un sous-groupe G_2 de G_1, d'ordre p^{n-2} et tel que $o\left(\frac{G_1}{G_2}\right) = p$.

Ainsi, de proche en proche on construit une suite de composition strictement décroissante de G, de longueur n (car $o(G_n) = p^0 = 1$), telle que chacun de ses quotients est d'ordre p, donc simple.

— Supposons *G non abélien* et raisonnons par récurrence sur n; $Z(G)$ étant le centre de G, d'après le théorème (5.27), on a $Z(G) \neq (e)$, donc $o(Z(G)) = p^k$ avec $1 \leqslant k \leqslant n - 1$. Soit x un élément d'ordre p de $Z(G)$; x existe d'après le théorème de Sylow. Posons $H = \langle x \rangle$.

$$H \leqslant Z(G) \Rightarrow H \lhd G \quad \text{(exemple (4.12) 3°)}$$

$$o(H) = p \Rightarrow o\left(\frac{G}{H}\right) = p^{n-1}.$$

Compte tenu de l'hypothèse de récurrence, $\frac{G}{H}$ est un groupe de longueur $n - 1$ et tous les quotients d'une suite de Jordan-Hölder de $\frac{G}{H}$ sont d'ordre p.

D'autre part, H est d'ordre p, donc H est de longueur 1; d'après la proposition (7.17), G est de longueur n.

De plus, la démonstration de la proposition (7.17) montre que, si $\frac{G}{H} > \frac{G_1}{H} > \ldots > \frac{G_{n-2}}{H} > \frac{G_{n-1}}{H} = (\bar{e})$ est une suite de Jordan-Hölder de $\frac{G}{H}$, alors :

$$G > G_1 > \ldots > G_{n-2} > H > (e) \tag{14}$$

est une suite de Jordan-Hölder de G; on en déduit que tous les quotients de cette suite sont d'ordre p.

COROLLAIRE (7.19). *Tout p-groupe fini d'ordre p^n a au moins un sous-groupe maximal normal d'ordre p^{n-1}.*

En effet, dans (14), on a $G_1 \lhd G$ et $o\left(\frac{G}{G_1}\right) = p$ premier, donc G_1 est maximal dans G (proposition (4.54)).

Remarque (7.20) :

1° Si un groupe infini G est de longueur finie, alors un sous-groupe de G n'est pas nécessairement de longueur finie (exercice 5, chap. VII).

2° G et G′ étant deux groupes, on voit aisément que

$$G \simeq G' \Rightarrow \text{long}(G) = \text{long}(G'),$$

mais la réciproque est fausse.

Par exemple, d'après la proposition (7.18), les groupes d'ordre 4, C_4 et $C_2 \times C_2$ sont de longueur 2, mais ils ne sont pas isomorphes.