تصحيح امتحان السداسي الثاني

حل التمرين الأول:

$$F=\{(x-y,\ 2x+y+4z,\ 3y+2z);\ x,y,z\in\mathbb{R}\}$$ (1)

يكون F فضاء جزئي من $\mathbb{R}^3$ اذا تحقق

$$\begin{cases} F\neq 0 \Rightarrow (0,0,0)\in F & 1 \\ \forall U,V\in F:\ U+V\in F & 0{,}5 \\ \forall \lambda\in\mathbb{R},\forall U\in F:\ \lambda U\in F & 0{,}5 \end{cases}$$

$F\neq 0$ محققة لأن

$$(0-0,\ 2\times0+0+4\cdot0,\ 3\cdot0+2\cdot0)=(0,0,0)\in F$$

$\forall U,V\in F \overset{?}{:} U+V\in F$

$$\begin{cases} U\in F\Rightarrow (x-y,\ 2x+y+4z,\ 3y+2z)\in F \\ V\in F\Rightarrow (x'-y',\ 2x'+y'+4z',\ 3y'+2z')\in F \end{cases}$$

$$U+V=((x+x')-(y+y'),\ 2(x+x')+(y+y')+4(z+z'),\ 3(y+y')+2(z'+z))$$

$$=(x''-y'',\ 2x''+y''+4z'',\ 3y''+2z'')\in F\ /\ x''=(x+x')\in\mathbb{R},\ y''=(y+y')\in\mathbb{R},\ z''=(z+z')\in\mathbb{R}$$

$\forall \lambda\in\mathbb{R},\forall U\in F \overset{?}{:} \lambda U\in F$

$$\lambda U=(\lambda x-\lambda y,\ 2\lambda x+\lambda y+4\lambda z,\ 3\lambda y+2\lambda z)=(x'-y',\ 2x'+y'+4z',\ 3y'+2z')\in F$$

حيث $x'=\lambda x\in\mathbb{R},\ y'=\lambda y\in\mathbb{R},\ z'=\lambda z$

(2) $$U=(x-y,\ 2x+y+4z,\ 3y+2z)=x\underbrace{(1,2,0)}_{e_1}+y\underbrace{(-1,1,3)}_{e_2}+z\underbrace{(0,4,2)}_{e_3}$$ 0,5

اذن العائلة (e_1,e_2,e_3) هي عائلة مولدة 0,5

V عبارة عن مزج خطي

هل هي حرة؟

$$\forall \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}:\ \lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1-\lambda_2=0\\ 2\lambda_1+\lambda_2+4\lambda_3=0\\ 3\lambda_2+2\lambda_3=0\end{cases}\Rightarrow 2\lambda_2+\lambda_2-6\lambda_2=0\Rightarrow\lambda_2=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0\ (\ldots)$$

0,75 $\dim\{e_1, e_2, e_3\} = 3$ بعد الفضاء

0,75 $\dim F = \dim(\mathbb{R}^3) = 3 \Rightarrow F = \mathbb{R}^3$ (3

(II اثبات أن f تطبيق خطي

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longrightarrow x - y$$

1

$$\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} : f(\lambda(x,y)+\beta(x',y')) = f(\lambda x+\beta x', \lambda y+\beta y')$$

$$= \lambda x + \beta x' - \lambda y - \beta y' = \lambda(x-y)+\beta(x'-y') = \lambda f(x,y)+\beta f(x',y')$$

حل التمرين الثاني

(1 حساب A^2, A^3

1 $A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, 1 $A^3 = A\cdot A\cdot A = A\cdot A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \\ 8 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

(2

$$A^3-3A^2+2A-2I = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \\ 8 & 6 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \\ 12 & 6 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2

(3

$$A^3-3A^2+2A-2I = 0 \Rightarrow \begin{cases} A(A^2-3A+2I_3) = 2I \Rightarrow A\left(\dfrac{A^2-3A+2I_3}{2}\right) = I \\ (A^2-3A+2I_3)A = 2I \Rightarrow \left(\dfrac{A^2-3A+2I_3}{2}\right)A = I \end{cases}$$

1

$AA^{-1} = A^{-1}A = I$ إذن A هي مصفوفة عكوسة لأنها حققت

1 $A^{-1} = \dfrac{A^2-3A+2I_3}{2}$ ومصفوفتها العكسية

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1

حل التمرين الثالث

$$\begin{cases} x+y-z=2 & \text{--- } (1) \\ x+2y+z=3 & \text{--- } (2) \\ x+y+4z=3 & \text{--- } (3) \end{cases}$$

1) طريقة التعويض

$(1)-(3) \Rightarrow -5z=-1 \Rightarrow \boxed{z=\frac{1}{5}}$

2) ($(2)-(1)$ نعوض z في) $\Rightarrow y+2z=1 \Rightarrow y=1-\frac{2}{5}=\boxed{\frac{3}{5}=y}$

(نعوض z و y في (1)) $\Rightarrow x+\frac{3}{5}-\frac{1}{5}=2 \Rightarrow x=2-\frac{2}{5}=\frac{8}{5}=x$

2) طريقة المصفوفة العكسية

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

المصفوفة المرافقة للنظام هي

0,5) $\det(A)=5\neq 0$ (A عكوسة)

حساب $\det A$

0,5) $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{7}{5} & -1 & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & 1 & -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & -5 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ هي A^{-1} المصفوفة العكسية

1) حل جملة معادلات من الشكل:

2) $X=A^{-1}B=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & -5 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{8}{5} \\ y=\frac{3}{5} \\ z=\frac{1}{5} \end{cases}$

3) طريقة كرامر

2) $x=\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{5}=\frac{8}{5}$, $y=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{5}=\frac{3}{5}$, $z=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{5}=\frac{1}{5}$

4) طريقة غوص

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3-L_1]{L_2-L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{5}L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} \end{array}\right) \xrightarrow[L_2-2L_3]{L_1+L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{11}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} \end{array}\right) L_1-L_2$$

2) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{8}{5} \\ y=\frac{3}{5} \end{cases}$