08/..

امتحان التقييم المستمر رقم 01

لتكن F فضاء جزئي من $\mathbb{R}^3$ حيث،

$$F=\{(x-y, 2x+y+4z, 3y+2z) \; x,y,z\in\mathbb{R}\}$$

1) أوجد أساس لـ F، ماهو بعده؟

2) هل F مساوي لـ $\mathbb{R}^3$؟

الحل

* $F=\{(x-y, 2x+y+4z, 3y+2z) \; x,y,z\in\mathbb{R}\}$

$$X=(x-y, 2x+y+4z, 3y+2z)=x\underbrace{(1,2,0)}_{e_1}+y\underbrace{(-1,1,3)}_{e_2}+z\underbrace{(0,4,2)}_{e_3}$$

عبارة عن مزج خطي اذن العائلة $\{e_1, e_2, e_3\}$ هي عائلة مولدة. 02,5

هل هي حرة؟

$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in\mathbb{R}: \; \lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\lambda_3 e_3=0$

$$\Rightarrow \lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1-\lambda_2=0\\2\lambda_1+\lambda_2+4\lambda_3=0\\3\lambda_2+2\lambda_3=0\end{cases}\Rightarrow 2\lambda_2+\lambda_2-6\lambda_2=0$$

$$\Rightarrow \lambda_2=0$$

$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ / العائلة حرة 02,5

* $\dim\{e_1, e_2, e_3\}=3$ 02

* $\dim F=\dim(\mathbb{R}^3)=3 \Rightarrow \boxed{F=\mathbb{R}^3}$ 01

تصحيح امتحان التقييم المستمر الثاني

نص التمرين

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1) احسب $A^3 - A$ ، 2) تأكد أن A عكوسة واستنتج A^{-1}.

الحل :

حساب $A^3 - A$

1,5 — 1,5

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 - A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot I_3$$ 2

2)

$$A^3 - A = A \times A^2 - A I_3 = A(A^2 - I_3) = 4 I_3 \Rightarrow A \underbrace{\left(\frac{A^2 - I_3}{4}\right)}_{A^{-1}} = I_3$$

$$= A^2 \times A - I_3 \times A = (A^2 - I_3) \cdot A = 4 I_3 \Rightarrow \left(\frac{A^2 - I_3}{4}\right) \cdot A = I_3$$ 1,5

إذن

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_3$$ (A عكوسة)

$$A^{-1} = \frac{A^2 - I_3}{4} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$ 1,5

امتحان التقييم المستمر رقم 03

نص التمرين

حل جملة المعادلات التالية بأربع طرق :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$$

الحل :

1) الطريقة الأولى (التعويض)

0,2

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 & \cdots (1) \\ x_2 + 2x_3 = 2 & \cdots (2) \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 6 & \cdots (3) \end{cases}$$

$$((1)-(3))-(2) \quad \begin{cases} 5x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases} \quad \boxed{x_2 = \frac{1}{6}}$$

بالتعويض في (2) نجد $\boxed{x_3 = \frac{11}{12}} \Longleftarrow 2x_3 = 2 - \frac{1}{6} = \frac{11}{6}$

بالتعويض في (1) نجد $\boxed{x_1 = \frac{15}{4}} \Longleftarrow x_1 + \frac{1}{3} + \frac{11}{12} = 5 \Rightarrow x_1 = \frac{60}{12} - \frac{11}{12} - \frac{4}{12}$

2) الطريقة الثانية (المصفوفة العكسية)

الكتابة المصفوفية هي : $AX = B \Longleftrightarrow$

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}} \overset{X}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}} = \overset{B}{\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}}$$

حلها من الشكل $X = A^{-1} \cdot B$ حيث ($\det(A) = 12$ (تقبل مصفوفة عكسية)

0,5

$$A^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 9 & -9 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,75 & -0,75 & 0,25 \\ 0,1666666667 & '' & - \\ -0,0833 & 0,4166 & 0,0833 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

0,5

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\times 5 - \frac{3}{4}\times 2 + \frac{1}{4}\times 6 \\ \frac{1}{6}\times 5 + \frac{1}{6}\times 2 - \frac{1}{6}\times 6 \\ -\frac{1}{12}\times 5 + \frac{5}{12}\times 2 + \frac{1}{12}\times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{4} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{11}{12} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{15}{4} \\ x_2 = \frac{1}{6} \\ x_3 = \frac{11}{12} \end{cases}$$

إذن الحل هو

1

3) الطريقة الثالثة (طريقة كرامر)

الجملة هي جملة كرامر $\Longleftarrow \det(A) = 12$

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 6 & -3 & 3 \end{vmatrix} \quad 45 \quad 15 \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

4) الطريقة الرابعة (طريقة غوص)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & 6 \end{array}\right)_{L_3 - L_1} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right)_{L_3 + 5L_2} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & 11 \end{array}\right)_{\frac{1}{12}L_3} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{12} \end{array}\right)^{L_1 - L_3}_{L_2 - 2L_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & \frac{49}{12} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{12} \end{array}\right)^{L_1 - 2L_2} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{15}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{12} \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{15}{4} \\ x_2 = \frac{1}{6} \\ x_3 = \frac{11}{12} \end{cases}$$

2