Centre Universitaire de Mila
Département de Mathématiques
3ème année Licence Mathématiques
Module : Transformations intégrales dans les espaces Lp

Série de TD N°3

2023-2024

<u>Exercice 1 :</u> Calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes

1. $f_1(t) = e^{at}\cos(wt)$
2. $f_2(t) = e^{at}\sin(wt)$
3. $f_3(t) = \cos^2(t)$
4. $f_4(t) = te^{-t}\cos(t)$

<u>Exercice 2 :</u> Soient $a \in \mathbb{R}_+$, f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par $f(t) = te^{at}$

1. Calculer par deux méthodes la transformée de Laplace de f et déterminer l'absise de la convergence simple.
2. Soient $k \in \mathbb{N}$, f_k une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par $f_k(t) = \frac{t^k}{k!}e^{at}$.
   Montrer par récurrence que
$$F_k(p) = \mathrm{L}(f_k)(p) = \frac{1}{(p-a)^{k+1}}$$

<u>Exercice 3 :</u> Trouver la transformée de Laplace inverse des fonctions suivantes

1. $F_1(p) = \frac{2p+1}{p^2+5p+6}$
2. $F_2(p) = \frac{3p}{p^2+4p+4}$
3. $F_3(p) = \frac{e^{-3p}}{p^2(p-1)}$
4. $F_4(p) = \frac{1}{p(p^2+w^2)}$

<u>Exercice 4 :</u> Résoudre les équations différentielles suivantes

1. $y''(t) - y(t) = 3\,e^{-2t} + t + 1, \quad y'(0) = y(0) = 0.$
2. $y''(t) + 2\,y'(t) + 5\,y(t) = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = -4.$
3. $y''(t) + 3y(t) = \sin(t), \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$
4. $y'''(t) + 5\,y''(t) + 6\,y'(t) = 0, \quad y(0) = 3,\ y'(0) = -2,\ y''(0) = 7.$

<u>Exercice 5 :</u> Résoudre l'équation intégrale suivante
$$y(t) = t + \int_0^t y(x)\sin(t-x)dx$$

<u>Exercice 5 :</u> Résoudre les systèmes différentiels avec conditions initiales suivantes
$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - 2y(t) & x(0) = 1 \\ y'(t) = x(t) + y(t) & y(0) = 0. \end{cases}$$
$$\begin{cases} y''(t) + (z'(t) - y'(t)) = \frac{-3}{4}y(t) & y(0) = z(0) = 0 \\ z''(t) - (z'(t) - y'(t)) = \frac{-3}{4}z(t) & y'(0) = 1,\ z'(0) = -1. \end{cases}$$