Centre Universitaire de Mila

3ème année Licence Mathématiques

Module : *Transformations intégrales dans les espaces Lp*

Nom

Prénom

Groupe

Examen

Date : 20/05/2023. **Durée** : 1h 30m

Exercice 1 (11 points)

1)* Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-|x|}, \qquad g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

a) Calculer la transformée de Fourier de f (2 pts)

$\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iwx} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} e^{-iwx} dx$ 0,5

f paire $= 2\,\mathrm{Re}\int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-iwx} dx = 2\,\mathrm{Re}\int_0^{+\infty} e^{(-1-iw)x} dx$ 0,5

$= 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{-1}{1+iw} e^{(-1-iw)x}\Big|_0^{\infty}\right) = 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{-1}{1+iw} e^{-x} e^{-iwx}\Big|_0^{\infty}\right)$ 0,5

e^{-iwx} bornée $2\,\mathrm{Re}\left(0 - \frac{-1}{1+iw}\right) = 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{1-iw}{1+w^2}\right)$

donc $\hat{f}(w) = \frac{2}{1+w^2}$. 0,8 ... (*)

b) Déduire la transformée de Fourier de g (1.5 pt)

Nous avons $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f(x))) = 2\pi f(-x)$ 0,5

donc $\mathcal{F}\left(\frac{2}{1+w^2}\right) = 2\pi e^{-|x|}$ 0,5

d'où $\mathcal{F}(g)(w) = \hat{g}(w) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \pi e^{-|w|}$ 0,5

c) Soit u une fonction intégrable telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} : u(x) = e^{-|x|} + \alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-s|} u(s) ds, \quad \alpha > 0$$

1. Ecrire cette équation avec un produit de convolution (1 pt)

Nous avons $f(x) = e^{-|x|}$ donc $e^{-|x-s|} = f(x-s)$

$u(x) = f(x) + \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-s) u(s) dx$ d'où $u = f + \alpha f * u$

0,5 0,5

2. On suppose que l'équation admet une solution. Déterminer $\hat{u}$ (Si $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$.) (2 pts)

Nous avons $u = f + \alpha\, u * f$

donc $\hat{u} = \hat{f} + \alpha\, \hat{u}.\hat{f} \Rightarrow \hat{u} - \alpha \hat{u} \hat{f} = \hat{f}$ 0,5

$\hat{u}(1 - \alpha \hat{f}) = \hat{f}$ d'alors: $\hat{u} = \dfrac{\hat{f}}{1 - \alpha \hat{f}}$ 0,5

$\hat{u} = \dfrac{2}{1+w^2} \cdot \dfrac{1}{\left(1 - \alpha . \frac{2}{1+w^2}\right)} = \dfrac{2}{1+w^2 - 2\alpha}$ 0,5

d'où $\hat{u}(w) = \dfrac{2}{(1-2\alpha) + w^2}$ 0,5

3. Déduire la formule de u (Si $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$.) (1.5 pts)

$u(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{u}(w)) = \mathcal{F}^{-1}\left(\dfrac{2}{(1-2\alpha)+w^2}\right)$ 0,5

de ⊛ $\mathcal{F}^{-1}\left(\dfrac{2a}{a^2+w^2}\right) = e^{-a|x|}$ 0,5 $(f(x) = e^{-a|x|})$

donc $u(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\dfrac{2}{(\sqrt{1-2\alpha})^2 + w^2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1-2\alpha}} e^{-\sqrt{1-2\alpha}\,|x|}$ 0,5

II)* Soit Π une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1, & si\ |x| \leq a, \\ 0, & sinon. \end{cases}, \quad a > 0$$

1. Calculer la transformée de Fourier de Π (1.5 pts)

$\hat{\Pi}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(x) e^{-iwx} dx = \int_{-a}^{a} e^{-iwx} dx$ 0,5

$= \dfrac{1}{-iw} e^{-iwx} \Big|_{-a}^{a} = \dfrac{i}{w}\left(e^{-iwa} - e^{iwa}\right)$ 0,5

$= \dfrac{i}{w}\left(\cancel{\cos wa} - i \sin wa - \cancel{\cos wa} - i \sin wa\right)$

$= \dfrac{i}{w}(-2i \sin wa) = \dfrac{2 \sin wa}{w}$ 0,5

2. Déduire la valeure de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(at)\cos(xt)}{t} dt$ (2 pts)

Nous avons: $\dfrac{\Pi(x^+) + \Pi(x^-)}{2} = \mathcal{F}^{-1}(\hat{\Pi}(w)) = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Pi}(w)\, e^{iwx} dw$ 0,5

alors: $\dfrac{\Pi(x^+) + \Pi(x^-)}{2} = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{2 \sin wa}{w} (\cos wx + i \sin wx)\, dw$

0,5

AnyScanner

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{\sin wa \cos wx}{w}}_{\text{P Réel}} + i \underbrace{\frac{\sin wa \sin wx}{w}}_{\text{P Imaginaire}} dw = \frac{\pi}{2}\left(f(x^+)+f(x^-)\right), \forall x$$ 0,5

d'où $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin wa \cos wx}{w} dw = \begin{cases} \pi & \text{si } |x|<a \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } |x|=a \\ 0 & \text{si } |x|>a \end{cases}$$ 0,5

Exercice 2 (9 points)

1) Soit $f:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction définie par $f(t)=e^{(2-i)t}$. Calculer la transformée de Laplace de f et déterminer l'abscisse de la convergence simple (2 pts)

$$\mathcal{L}(f(x)) = F(p) = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-px} dx \qquad p = u+iv$$ 0,5

$$= \int_0^{+\infty} e^{(2-i)t} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{(2-i-u-iv)t} dt$$

$$= \frac{1}{2-i-u-iv} e^{(2-u)-i(1+v)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2-i-p} e^{(2-u)} \underbrace{e^{-i(1+v)}}_{\text{bornée}} \Big|_0^{\infty}$$ 0,5

$$\underset{\text{i.e. } \mathrm{Re}\, p = u > 2}{\overset{2-u<0}{=}} \frac{1}{2-i-p}(0-1) = \frac{1}{p-2+i}$$ 0,5

d'où l'abscisse de la convergence simple est $a=2$ 0,5

2) Trouver la transformée de Laplace inverse de la fraction suivante (3 pts)

$$F(p) = \frac{w^2 e^p}{p(p^2+w^2)_2}$$

$$F(p) = \frac{w^2 \cdot e^p}{p(p^2+w^2)} = e^p \cdot \frac{w^2}{p(p^2+w^2)} = e^p\left[\frac{a}{p} + \frac{bp+c}{p^2+w^2}\right]$$ 0,5

$$= e^p\left(\frac{1}{p} + \frac{-p}{p^2+w^2}\right)$$ 0,5

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}(F(p)) = \mathcal{L}^{-1}\left(e^p \cdot \frac{1}{p}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(e^p \cdot \frac{p}{p^2+w^2}\right)$$ 0,5

$$\begin{cases} F_1(p) = \frac{1}{p} \Rightarrow f_1(x) = 1 \quad \text{donc } \mathcal{L}^{-1}\left(e^p \cdot \frac{1}{p}\right) = f_1(x+1) = 1 \\ F_2(p) = \frac{p}{p^2+w^2} \Rightarrow f_2(x) = \cos wx \quad \text{donc } \mathcal{L}^{-1}\left(e^p \cdot \frac{p}{p^2+w^2}\right) = f_2(x+1) = \cos(wx+w) \end{cases}$$ 0,5 0,5

d'où $$f(x) = 1 - \cos w(x+1)$$ 0,5

$$\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-cp} F(p)\right) = f(x-c)$$

3) Résoudre les équations différentielles suivantes

a) $y'(t) + 3y(t) = 0$ *avec* $y(1) = 1$. (2 pts)

$\mathcal{L}(y'(t)) + 3\mathcal{L}(y(t)) = \mathcal{L}(0) = 0$

$pY(p) - y(0) + 3Y(p) = 0$ 0,5

$(p+3)Y(p) = y(0) \iff Y(p) = \frac{y(0)}{p+3}$ 0,5

donc $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(p)) = y(0)\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+3}\right)$

d'où $y(t) = y(0)e^{-3t}$ 0,5

Comme $y(1) = 1 = y(0)e^{-3}$ alors: $y(0) = e^{3}$

d'où $\boxed{y(t) = e^{3-3t}}$ 0,5

b) $y''(t) - y(t) = t + 1$ *avec* $y(0) = y'(0) = 0$. (2 pts)

$p^2Y(p) - py(0) - y'(0) - Y(p) = \mathcal{L}(t) + \mathcal{L}(1)$

$(p^2-1)Y(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}$ 0,5

$Y(p) = \frac{1}{p^2(p^2-1)} + \frac{1}{p(p^2-1)} = \frac{\cancel{p+1}}{p^2(p-1)\cancel{(p+1)}} = \frac{1}{p^2(p-1)}$ 0,25

$= \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p^2} + \frac{\gamma}{p-1}$ 0,25

$Y(p) = \frac{-1}{p} + \frac{-1}{p^2} + \frac{1}{p-1}$ 0,25

donc $y(t) = -\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p-1}\right)$ 0,25

$\boxed{y(t) = -1 - t + e^{t}}$ 0,5

♣♠ *Bonne chance* ♠♣

✓ *N.Haddad* ✓