Correction TD5 : Torsion

Exercice 1

1) Calcul de la contrainte sur la surface intérieure de la poutre

La contrainte tangentielle de torsion est donnée par la formule générale :

$$\tau = \frac{M_t \cdot}{I_p} r$$

Dans le cas d'une section droite tubulaire, le moment quadratique est égale à :

$$I_p = \frac{\pi (D_{ext}^4 - D_{\text{int}}^4)}{32}$$ = 148308,5 mm^4

Sur la surface intérieure du tube, le rayon est égale à :

$$r = \frac{D_{\text{int}}}{2}$$ = 16 mm

Ce qui donne pour la valeur de la contrainte :

τ_1= 21,57 N/mm^2

2) Calcul de la contrainte sur la surface extérieure de la poutre

Sur la surface extérieure du tube, le rayon est égale à :

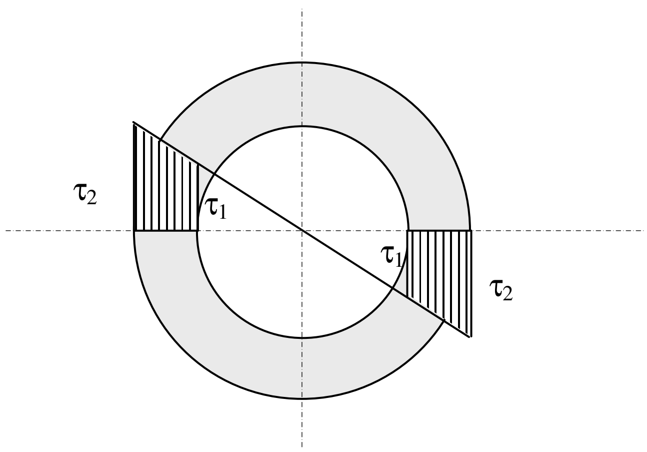
$$r = \frac{D_{ext}}{2}$$ = 20 mm

Ce qui donne pour la valeur de la contrainte :

τ_2= 26,97 N/mm^2

3) tracer de la distribution de la contrainte sur la section droite de la poutre

La formule de la contrainte tangentielle de torsion $\tau = \frac{M_t \cdot}{I_p} r$ indique que celle-ci est fonction linéaire du rayon r.



4) Vérification de la résistance de la poutre.

Appliquons le critère en contrainte:

$$\tau_{\max} \le \frac{\tau_e}{s}$$

On a $\tau_{max} = \tau_2$ = 26,97 N/mm^2

$$\frac{\tau_e}{s} = \frac{60}{2} = 30 \text{ MPa}$$

Donc on a $\tau_{\max} < \frac{\tau_e}{s}$, la condition de résistance est donc vérifiée

5) Calcul de l'angle de rotation d'une section droite située au milieu de la poutre.

$$\alpha = \frac{M_t \cdot x}{G \cdot I_p}$$

Le milieu de la poutre corresponds à $x = \frac{L}{2} = \frac{0{,}5}{2}$=0,25m=250mm

On a alors : $\alpha = \frac{200.10^3.250}{78.10^3.148308{,}5}$ = 0,0043 rad = 0,25°

6) Calcul de l'angle de rotation de la section extrême.

La section extrême de la poutre corresponds à x = L = 0,5m=500mm

On a alors : $\alpha = \frac{200.10^3.500}{78.10^3.148308{,}5}$ = 0,0086 rad = 0,5°

Exercice 2

1) Calcul du moment de torsion M_t transmis.

La contrainte tangentielle de torsion est donnée par la formule générale :

$P = 2\pi.f.M_t$ → $M_t = \frac{P}{2.\pi.f} = \frac{300.735{,}49}{2.3{,}14.3000/60}$=702,49 N.m

2) Calcul du diamètre minimum de l'arbre.

Appliquons le critère en contrainte:

$$\tau_{\max} \leq \frac{\tau_e}{s}$$

D'autre part on sait que : $\tau_{\max} = \frac{M_t.R}{I_p}$ avec $R = \frac{D}{2}$

Pour une section circulaire pleine : $I_p = \frac{\pi D^4}{32}$

On en déduit : $D \geq \sqrt[3]{\frac{16.M_t}{\pi.\tau_e/s}} = \sqrt[3]{\frac{16.702{,}49}{3{,}14.25.10^7/5}} = 0{,}0415m$

Donc D_{min}=41,5 mm

Exercice 3

<u>1er cas K_1=0 (Arbre plein)</u>

Calcul du diamètre

Appliquons le critère en contrainte:

$$\tau_{\max} \leq \frac{\tau_e}{s}$$

C

D'autre part on sait que : $\tau_{\max} = \dfrac{M_t . R}{I_p}$ avec $R = \dfrac{D}{2}$

Pour une section circulaire pleine : $I_p = \dfrac{\pi D^4}{32}$

On en déduit : $D \geq \sqrt[3]{\dfrac{16. M_t}{\pi . \tau_e / s}}$

$D_{min} = \sqrt[3]{\dfrac{16.1,9.10^6}{3,14.50.10^6 / 1}} = 0,58m = 58cm$

Calcul du poids de l'arbre :

$$P = m.g = \rho .V.g = \rho .\frac{\pi .D^2}{4}.L.g = 7800.\frac{3,14.0,58^2}{4}.30.10 = 617933N$$

Calcul de l'angle de rotation entre les deux extrémités :

$\alpha = \dfrac{M_t \cdot x}{G \cdot I_p}$ avec x=L

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{3,14.0,58^4}{32} = 0,01m^4$$

Alors, $\alpha_1 = \dfrac{1,9.10^6.30}{82000.10^6.0,01} = 0,07 rad = 4,01°$

<u>2ième cas K2=0,95 (Arbre creux)</u>

Calcul du diamètre

On a $K = \dfrac{D_{\text{int}}}{D_{ext}}$ → $D_{\text{int}} = D_{ext}.K$

Le moment quadratique vaut alors :

$$I_p = \frac{\pi (D_{ext}{}^4 - D_{\text{int}}{}^4)}{32} = \frac{\pi (D_{ext}{}^4 - D_{ext}{}^4 .K^4)}{32} = \frac{\pi .D_{ext}{}^4 (1 - K^4)}{32}$$

Appliquons le critère en contrainte:

$$\tau_{\max} \leq \frac{\tau_e}{s}$$

on trouve alors: $D_{ext} \geq \sqrt[3]{\dfrac{16.M_t}{(\pi .(1 - K^4).\tau_e / s}}$

donc : D_{ext}=1,014 m

on trouve pour le poids : P_2=232184 N

et un angle de rotation $\alpha_2 = 0,045 rad = 2,57°$

Le rapport des deux diamètres est : D_1/D_2=1,75

Le rapport des deux poids est: P_1/P_2=2,66

Le rapport des deux angles de rotation est: α_1/α_2=1,55

L'arbre creux a un diamètre 1,75 fois plus grand que celui de l'arbre plein mais il est 2,66 fois moins lourd et donc moins cher et il est 1,55 fois plus rigide.