Centre universitaire Abdelhafid Boussouf -Mila
Institut de Sciences et Technologies
Département de mathématiques et informatique
3ième Année mathématiques Appliquées

Matière: Simulation et pratique de logiciels

Chapitre 3: Méthode de Monte-Carlo

Présentée par:
AZI Mourad

May 5, 2024

Plan de cours

Introduction

Plan de cours

Introduction

Estimer l'aire d'une surface ou d'un volume
- Détermination de la superficie d'un lac
- Détermination de la valeur de π

Plan de cours

Introduction

Estimer l'aire d'une surface ou d'un volume
- Détermination de la superficie d'un lac
- Détermination de la valeur de π

Intégration par Monte Carlo
- Intégrale à une dimension
- Intégrales à N dimensions

Plan de cours

Introduction

Estimer l'aire d'une surface ou d'un volume
- Détermination de la superficie d'un lac
- Détermination de la valeur de π

Intégration par Monte Carlo
- Intégrale à une dimension
- Intégrales à N dimensions

Méthode de Monte Carlo par chaîne de Markov
- Rappels sur les chaînes de Markov

Introduction

L'origine de la méthode remonte aux années 1940, pendant la Seconde Guerre mondiale, lorsque des scientifiques travaillant sur le projet Manhattan(fabrication de la bombe atomique), notamment Stanislaw Ulam et John von Neumann, cherchaient des moyens de simuler le comportement des neutrons dans les réactions en chaîne des réacteurs nucléaires.

Introduction

L'origine de la méthode remonte aux années 1940, pendant la Seconde Guerre mondiale, lorsque des scientifiques travaillant sur le projet Manhattan(fabrication de la bombe atomique), notamment Stanislaw Ulam et John von Neumann, cherchaient des moyens de simuler le comportement des neutrons dans les réactions en chaîne des réacteurs nucléaires.
Ils ont en particulier utilisé ces méthodes probabilistes pour résoudre des équations aux dérivées partielles dans le cadre de la Monte-Carlo N-Particle transport.

Introduction

Introduction

L'origine de la méthode remonte aux années 1940, pendant la Seconde Guerre mondiale, lorsque des scientifiques travaillant sur le projet Manhattan(fabrication de la bombe atomique), notamment Stanislaw Ulam et John von Neumann, cherchaient des moyens de simuler le comportement des neutrons dans les réactions en chaîne des réacteurs nucléaires.
Ils ont en particulier utilisé ces méthodes probabilistes pour résoudre des équations aux dérivées partielles dans le cadre de la Monte-Carlo N-Particle transport.
Cette approche a révélé des similitudes avec les jeux de hasard pratiqués au casino Monte Carlo (Monaco), où les résultats dépendent également du hasard. Le nom de ces méthodes, a été inventé en 1947 par Nicholas Metropolis, et apparaît pour la première fois en 1949 dans un article coécrit avec Stanislaw Ulam.

Introduction

On appelle méthode de Monte-Carlo toute méthode visant à calculer une valeur numérique en utilisant des procédés aléatoires. Cette méthode est basée sur le principe de l'échantillonnage aléatoire et de la répétition des simulations pour obtenir des estimations précises. Elle permet de modéliser des phénomènes complexes en utilisant des calculs probabilistes, ce qui la rend très flexible et puissante pour résoudre une grande variété de problèmes.

Introduction

Introduction

On appelle méthode de Monte-Carlo toute méthode visant à calculer une valeur numérique en utilisant des procédés aléatoires. Cette méthode est basée sur le principe de l'échantillonnage aléatoire et de la répétition des simulations pour obtenir des estimations précises. Elle permet de modéliser des phénomènes complexes en utilisant des calculs probabilistes, ce qui la rend très flexible et puissante pour résoudre une grande variété de problèmes.

Les méthodes de Monte-Carlo sont particulièrement utilisées pour calculer des intégrales en dimensions plus grandes que 1 (en particulier, pour calculer des surfaces, des volumes, etc.) Elle est aussi utilisée dans de nombreux domaines tels que la finance, la physique, la biologie, l'ingénierie, etc. Pour chacun de ces problème, on effectue un grand nombre de tirages aléatoires dans les distributions de probabilité déterminées précédemment afin de calculer le résultat désiré.

Estimer l’aire d’une surface ou d’un volume

Estimer l’aire d’une surface ou d’un volume

Une grande catégorie de problèmes pouvant se résoudre par l’approche de Monte-Carlo est celle de l’estimation de l’aire d’une surface ou plus généralement d’un volume en dimension quelconque.

Estimer l’aire d’une surface ou d’un volume

Estimer l’aire d’une surface ou d’un volume

Une grande catégorie de problèmes pouvant se résoudre par l’approche de Monte-Carlo est celle de l’estimation de l’aire d’une surface ou plus généralement d’un volume en dimension quelconque.
Le principe général consiste à générer des points uniformément au hasard dans une zone bornée mais assez large pour contenir la surface ou le volume à estimer.
Ensuite, il suffit de compter le nombre de points tombant dans la surface ou le volume et de diviser par le nombre total de points générés pour estimer l’aire ou le volume.

Plan de cours

Introduction

Estimer l’aire d’une surface ou d’un volume

- Détermination de la superficie d’un lac
- Détermination de la valeur de π

Intégration par Monte Carlo

- Intégrale à une dimension
- Intégrales à N dimensions

Méthode de Monte Carlo par chaîne de Markov

- Rappels sur les chaînes de Markov

Détermination de la superficie d'un lac

Cet exemple est un classique en vulgarisation de la méthode de Monte-Carlo que en trouve dans tous les manuelle.

Soit une terrain rectangulaire ou carrée dont la surface **ST** connue. Au sein de cette aire se trouve un lac dont la superficie **SL** est inconnue. Grâce aux mesures des côtés de la zone, on connaît l'aire du rectangle.

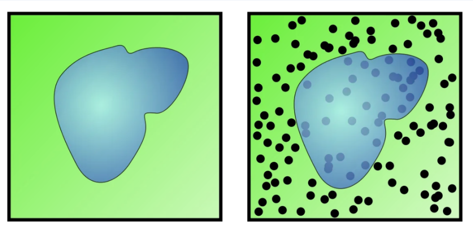
Détermination de la superficie d'un lac

Détermination de la superficie d'un lac

Cet exemple est un classique en vulgarisation de la méthode de Monte-Carlo que en trouve dans tous les manuelle.

Soit une terrain rectangulaire ou carrée dont la surface **ST** connue. Au sein de cette aire se trouve un lac dont la superficie **SL** est inconnue. Grâce aux mesures des côtés de la zone, on connaît l'aire du rectangle.

Pour trouver l'aire du lac, on demande à une armée de tirer **X** coups de canon de manière aléatoire sur cette zone. On compte ensuite le nombre **N** de boulets qui sont restés sur le terrain ; on peut ainsi déterminer le nombre de boulets qui sont tombés dans le lac : **X-N**.



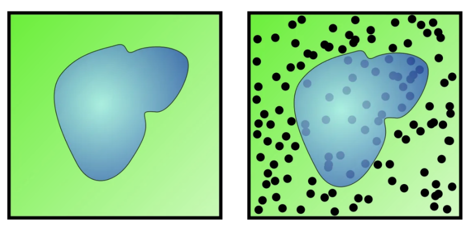
Détermination de la superficie d'un lac

Il suffit ensuite d'établir un rapport entre les valeurs :

$$\frac{ST}{SL} = \frac{X}{X - N}. \quad (1)$$

Alors:

$$SL = \frac{X - N}{X} \times ST. \quad (2)$$



Plan de cours

Introduction

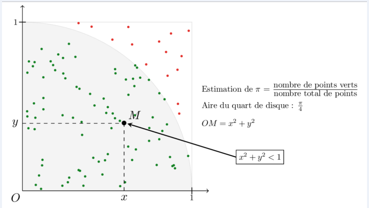
Estimer l'aire d'une surface ou d'un volume
- Détermination de la superficie d'un lac
- Détermination de la valeur de π

Intégration par Monte Carlo
- Intégrale à une dimension
- Intégrales à N dimensions

Méthode de Monte Carlo par chaîne de Markov
- Rappels sur les chaînes de Markov

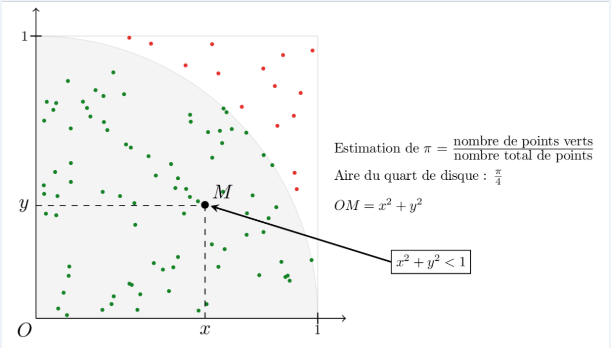
Détermination de la valeur de π

Soit un point M de coordonnées (x, y), où $0 < x < 1$ et $0 < y < 1$. On tire aléatoirement les valeurs de x et y entre 0 et 1 suivant une loi uniforme. Le point M appartient au disque de centre (0,0) de rayon $R = 1$ si et seulement si $x^2 + y^2 \leq 1$.
La probabilité que le point M appartienne au disque est $\frac{\pi}{4}$, puisque le quart de disque est de surface $\sigma = \frac{\pi R^2}{4} = \frac{\pi}{4}$, et le carré qui le contient est de surface $S = R^2 = 1$: si la loi de probabilité du tirage de point est uniforme, la probabilité de tomber dans le quart de disque vaut $\frac{\sigma}{S} = \frac{\pi}{4}$.
En faisant le rapport du nombre de points dans le disque au nombre de tirages, on obtient une approximation du nombre $\frac{\pi}{4}$ si le nombre de tirages est grand.



Détermination de la valeur de π

En faisant le rapport du nombre de points dans le disque au nombre de tirages, on obtient une approximation du nombre $\frac{\pi}{4}$ si le nombre de tirages est grand.



Plan de cours

Introduction

Estimer l'aire d'une surface ou d'un volume
- Détermination de la superficie d'un lac
- Détermination de la valeur de π

Intégration par Monte Carlo
- Intégrale à une dimension
- Intégrales à N dimensions

Méthode de Monte Carlo par chaîne de Markov
- Rappels sur les chaînes de Markov

Intégrale à une dimension

L'intégration par Monte Carlo est une méthode utilisée pour estimer numériquement la valeur d'une intégrale en utilisant des techniques de simulation probabiliste.
L'intégrale d'une fonction correspond à l'aire algébrique sous sa courbe. Estimer l'intégrale d'une fonction revient donc à estimer l'aire d'une surface.
Par exemple supposons que l'on veuille estimer l'intégrale suivante:

$$I = \int_0^1 g(x)dx \tag{3}$$

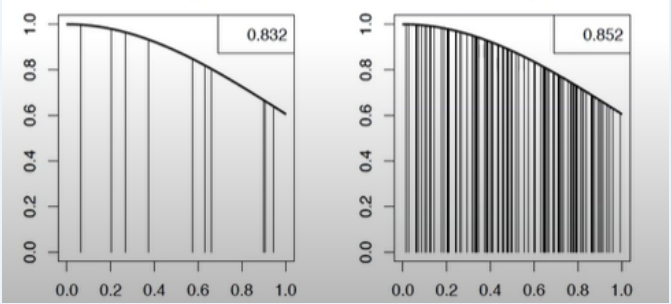
où $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue. Cette intégrale peut être vue comme une espérance. En effet, soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$, alors on obtient(Formule de transfert):

$$I = E(g(X) = \int_0^1 g(x)dx \tag{4}$$

Intégrale à une dimension

On peut alors appliquer une méthode simple de Monte-Carlo et générer n variables aléatoires $x_1, \ldots, x_n$ uniformément au hasard dans $[0, 1]$ et approximer l'intégrale par:

$$\tilde{I}_n = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} g(x_k). \tag{5}$$



Intégration par Monte Carlo

Intégrale à une dimension

Si on veut estimer l'intégrale sur $[a, b]$:

$$I = \int_a^b h(x)dx \tag{6}$$

Nous exprimons tout d'abord la fonction $h(x)$ sous la forme $h(x) = g(x)f(x)$. où $f(x)$ est une densité sur (a, b) appelée échantillonneur d'importance. Ainsi, par définition de l'espérance :

$$I = E(g(X)) = \int_a^b g(x)f(x)dx \tag{7}$$

où X est la variable aléatoire avec fonction de densité de probabilité $f(x)$. Par la suite, si $x_1, \ldots, x_n$ sont des observations simulées de la densité $f(x)$, alors

$$\tilde{I}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(x_k). \tag{8}$$

constitue une estimation de l'intégrale I

Intégrale à une dimension

Par souci de simplicité et parce qu'il est facile d'obtenir un échantillon aléatoire d'une loi uniforme, nous posons en général X est $\mathcal{U}(a, b)$, soit

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a < x < b. \tag{9}$$

donc l'intégrale peut s'écrie comme suit:

$$I = (b-a)\int_a^b \frac{h(x)}{b-a}dx = (b-a)E(h(X)) \tag{10}$$

L'estimateur de l'intégrale devient alors

$$\tilde{I}_n = \frac{(b-a)}{n}\sum_{k=1}^{n} h(x_k). \tag{11}$$

où $x_1, \ldots, x_n$ est un échantillon aléatoire d'une loi $\mathcal{U}(a, b)$.

Intégration par Monte Carlo

Intégrale à une dimension

Par changement de variable posons

$$u = \frac{x-a}{b-a}, \quad du = \frac{dx}{b-a}. \tag{12}$$

Nous obtenons la formule suivante

$$I = (b-a)\int_0^1 h(a+(b-a)u)du = (b-a)E(h(a+(b-a)U)) \tag{13}$$

où U est U(0, 1).
Une estimation de l'intégrale est donc

$$\tilde{I}_n = \frac{(b-a)}{n}\sum_{k=1}^{n} h(a+(b-a)u_k). \tag{14}$$

où $u_1, \ldots, u_n$ est un échantillon aléatoire d'une loi $\mathcal{U}(0,1)$.

Intégration par Monte Carlo

Intégrale à une dimension (Example)

Supposons que nous voulions déterminer la valeur de l'intégrale ci-dessous

$$I = E(g(X)) = \int_0^1 g(x)dx = [\cos(50x) + \sin(50x)]^2 dx, \tag{15}$$

Ce problème peut être vu comme une intégration uniforme. Puisque l'évaluation de cette intégrale est sur [0,1], alors choisissons l'échantillonneur d'importance la loi uniforme sur $\mathcal{U}[0,1]$, c'est à dire $f(x) = 1$ pour tout $x \in [0,1]$.

Plan de cours

Introduction

Estimer l'aire d'une surface ou d'un volume

- Détermination de la superficie d'un lac
- Détermination de la valeur de π

Intégration par Monte Carlo

- Intégrale à une dimension
- Intégrales à N dimensions

Méthode de Monte Carlo par chaîne de Markov

- Rappels sur les chaînes de Markov

Intégrale à N dimensions

L'objet essentiel de cette partie est l'utilisation des méthodes de simulation pour l'estimation des intégrales de la forme:

$$I = \int_{\Omega} h(x)dx. \tag{16}$$

où g est intégrable sur Ω de $\mathbb{R}^k$.
Cette méthode nécessite la spécification d'une fonction de densité f appelée échantillonneur d'importance, Nous pouvons alors écrire

$$I = E(\frac{h(X)}{f(X)}) = \int_{\Omega} \frac{h(x)}{f(x)} f(x)dx. \tag{17}$$

Soit $g = h/f$, nous obtenons alors

$$I = E(g(X)) = \int_{\Omega} g(x)f(x)dx. \tag{18}$$

Intégrale à N dimensions

Nous supposons que nous avons un algorithme efficace pour générer un échantillons à partir de f. Le principe de la méthode de Monte Carlo pour approcher l'inegralle (16) est de générer (par ordinateur) un échantillon $x_1, \ldots, x_n$ suivant la densité f, et de proposer comme approximation la moyenne empirique

$$\tilde{I}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g(x_k). \tag{19}$$

Intégrale à N dimensions (Example)

Supposons que nous voulions déterminer la valeur de l'intégrale:

$$I = E(g(X)) = \int_0^{\infty} h(x)dx = \int_0^{\infty} xe^{-x}dx. \tag{20}$$

Choisissons l'échantillonneur d'importance une densité exponentielle de paramètre $\lambda = 1$ qui est définie sur le même support que h, c'est à dire $f(x) = e^{-x}$ pour tout $x \geq 0$.

Intégrale à N dimensions (Example)

Supposons que nous voulions déterminer la valeur de l'intégrale:

$$I = E(g(X)) = \int_0^{\infty} h(x)dx = \int_0^{\infty} xe^{-x}dx. \tag{20}$$

Choisissons l'échantillonneur d'importance une densité exponentielle de paramètre $\lambda = 1$ qui est définie sur le même support que h, c'est à dire $f(x) = e^{-x}$ pour tout $x \geq 0$.

Alors on prend un échantillon de nombres aléatoires $x_1, \ldots, x_n$ issu de Exp(1). ces x_k sont calculées par la formule $x_k = \log u_k$ où $u_k \sim \mathcal{U}(0, 1), \;\; k = 1, \ldots, n$.

Intégrale à N dimensions (Example)

Supposons que nous voulions déterminer la valeur de l'intégrale:

$$I = E(g(X)) = \int_0^{\infty} h(x)dx = \int_0^{\infty} xe^{-x}dx. \tag{20}$$

Choisissons l'échantillonneur d'importance une densité exponentielle de paramètre $\lambda = 1$ qui est définie sur le même support que h, c'est à dire $f(x) = e^{-x}$ pour tout $x \geq 0$.

Alors on prend un échantillon de nombres aléatoires $x_1, \ldots, x_n$ issu de Exp(1). ces x_k sont calculées par la formule $x_k = \log u_k$ où $u_k \sim \mathcal{U}(0,1), \quad k = 1, \ldots, n$.

Définissons maintenant la fonction $g(x) = h(x)/f(x) = x$. Finalement, l'estimateur d'importance s'écrit:

$$\tilde{I}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(x_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \log u_k = -\frac{1}{n}\log\prod_{k=1}^{n} u_k. \tag{21}$$

Plan de cours

Introduction

Estimer l'aire d'une surface ou d'un volume
- Détermination de la superficie d'un lac
- Détermination de la valeur de π

Intégration par Monte Carlo
- Intégrale à une dimension
- Intégrales à N dimensions

Méthode de Monte Carlo par chaîne de Markov
- Rappels sur les chaînes de Markov