

---

# Programmation Mathématiques

---

**A. Bazeniari**

**Enseignant chercheur  
Centre universitaire Abdelhafid Boussouf  
Mila, Algérie**

Se reporter à des manuels de base et à certaines livres de spécialités

Janvier 2024

# Chapitre 1

## Optimisation sous contraintes

### 1.1 Introduction

L'optimisation sous contraintes traite les problèmes qui recherchent la meilleure solution possible à un problème tout en respectant un ensemble de contraintes. En d'autres termes, il s'agit de trouver le maximum ou le minimum d'une fonction objectif sous réserve de certaines conditions. L'approche considérée ici pour obtenir les conditions d'optimalité est basée sur les notions de descente et de direction admissible. L'étude de ces conditions a permis de développer les algorithmes de résolution et de vérifier la validité des résultats obtenus.

Dans ce chapitre, les fonctions sont toujours supposées différentiables à tout ordre. Si  $f$  est définie sur  $S \subset \mathbb{R}^n$  et à valeurs réelles, sa différentielle en  $x \in S$  est l'application linéaire notée

$$f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \|h\| \varepsilon(h), \quad \varepsilon(h) \rightarrow 0 \text{ lorsque } h \rightarrow 0. \quad (1.1)$$

Rappelons la formule de Taylor à l'ordre 2

$$f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x), h \rangle h + \|h\|^2 \varepsilon(h), \quad \varepsilon(h) \rightarrow 0 \text{ lorsque } h \rightarrow 0. \quad (1.2)$$

## 1.2 Direction admissible

**Définition 1.2.1.** (*Direction admissible*). Soit  $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x \in S$ .  $d$  est une direction admissible si

$$\exists \lambda' > 0 \text{ tel que } x + \lambda d \in S, \text{ pour } 0 \leq \lambda \leq \lambda'.$$

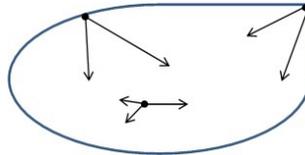


FIGURE 1.1 – Directions admissible

- Remarque 1.2.1.**
1. Cette définition nous montre que tous les vecteurs  $d$  de  $\mathbb{R}^n$  sont des directions admissibles, si le point  $x + \lambda d$  est un point intérieur de  $S$ .
  2. La nature de l'ensemble  $S$  intervient dans le formalisme d'équations ou d'inéquations de la condition d'optimalité, à savoir les points sur la frontière de  $S$ .

### 1.2.1 Direction admissible à l'optimum

**Théorème 1.2.1.** (*condition nécessaire de Peano-Kantorovitch*). Soit  $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ . Si  $x^*$  est un minimum local (globale) de  $f$  sur  $S$ , alors  $\forall d$  direction admissible en  $x^*$ , on a

$$\nabla^T f(x^*)d \geq 0. \quad (1.3)$$

*Démonstration.* Soit  $d$  une direction admissible en  $x^*$ . Considérons la fonction  $g(\lambda) = f(x^* + \lambda d)$ .

$\forall x \in S$  on a  $f(x^*) \leq f(x)$ . D'où  $\lambda^* = 0$  est un minimum local de  $g(\lambda)$  sur  $[0, \lambda']$ . On a

$$g(\lambda) = g(0) + \lambda g'(0) + o(\lambda),$$

et comme  $x^*$  est un minimum local, alors  $g(\lambda) - g(0) \geq 0$ .

Par conséquent  $g'(\lambda) = [\nabla f(x^* + \lambda d)]^T d \geq 0$ ,

on obtient  $g'(0) = \nabla^T f(x^*)d \geq 0$ . □

## 1.3 Existence et unicité de la solution

**Définition 1.3.1.**

1. Une partie  $U$  de  $S$  est un ouvert de  $S$  si pour tout  $x \in U$  il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $B(x, \epsilon) \subset U$ .

2. Une partie  $F$  de  $S$  est un fermé de  $S$  si et seulement si son complémentaire  $F^c$  dans  $S$  est ouvert.

**Remarque 1.3.1.** Dans  $\mathbb{R}$ , les intervalles ouverts sont des ouverts et les intervalles fermés sont des fermés. Plus généralement, toute boule ouverte est une partie ouverte et toute boule fermée est une partie fermée.

**Théorème 1.3.1.** (Existence : Théorème de Weierstrass).

1. Si  $S$  est un sous-ensemble fermé et borné de  $\mathbb{R}^n$  et  $f$  continue, alors  $f$  admet au moins un point extremum.
2. Si  $S$  est un sous-ensemble fermé de  $\mathbb{R}^n$  et si  $f$  est croissante à l'infini ( $f$  est coercive si  $f(x) \rightarrow +\infty$  lorsque  $\|x\| \rightarrow +\infty$ ), alors  $f$  admet un point minimum globale sur  $S$ .

*Démonstration.* 1.  $S$  est fermé et borné de  $\mathbb{R}^n$  alors compact, et comme  $f$  est continue alors elle atteint ses bornes sur  $S$ . Donc  $x^*$  existe.

2. Soit l'ensemble  $S_0 = \{x, x_0 \in S / f(x) \leq f(x_0)\}$ , on voit que  $S_0$  est un compact (fermé car  $f$  est continue, borné car  $f$  est coercive). Donc  $x^*$  existe.

□

**Théorème 1.3.2.** (Unicité). Soit le problème de minimisation (PNL) avec  $S$  convexe et  $S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  convexe. Alors,

1. Tout minimum local de (PNL) est un minimum global de problème.
2. Si  $f$  est strictement convexe, il y a au plus un minimum de problème.

**Exemple 1.3.1.** Soit le problème (PNL) :

$$\begin{cases} \text{Min } f(x) = x^2 \\ g : x^4 - 1 \leq 0 \\ x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} .$$

L'ensemble  $g$  est fermé (car  $g^{(-1)}([-1,1])$  est fermé) et  $f$  croissante à l'infinie. Comme  $f$  est continue, elle atteint ses bornes et elle admet un minimum global  $x^*$ .

## 1.4 Conditions nécessaires d'optimalité

L'idée de cette section est basée sur la recherche d'une expression plus pratique de la condition (1.3).

### 1.4.1 Contraintes de type égalité

Soit l'ensemble  $S$  définie par,

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : h_1(x) = 0, \dots, h_p(x) = 0\}.$$

- On dit que  $h$  réalise  $p$  contraintes et  $x$  est dit variable de décision.
- Cette ensemble des contraintes d'qualités est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  et qui représente une hypersurface.

### 1.4.1.1 Plan tangent

**Définition 1.4.1.** On définit le plan tangent au point  $x^*$ , tout vecteur  $y$  qui est orthogonal avec les gradients de  $h_i$ , on écrit

$$T = \{y, \nabla h(x^*)y = 0\}. \tag{1.4}$$

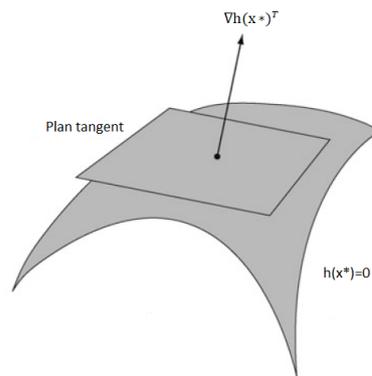


FIGURE 1.2 – Plan tangent.

**Exemple 1.4.1.** Soit la contrainte  $h(x_1, x_2) = x_1$ . Le plan tangent est l'axe des  $x_2$ , car

$$(1, 0)^T (y_1, y_2) = 0 \Rightarrow y_1 = 0.$$

**Définition 1.4.2.** On dit que  $x^*$  est un point régulier pour la contrainte  $h(x) = 0$  si,

- $h(x^*) = 0$ ,
- Les vecteurs  $\nabla h_i(x^*)$  sont linéairement indépendants.

**Théorème 1.4.1.** (CN1) Soit  $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ . On suppose que  $f$  admet en  $x^* \in S$  un minimum local et que,

$$\text{La famille } (\nabla h_1(x^*), \dots, \nabla h_p(x^*)) \text{ est libre} \tag{*}$$

Alors il existe des multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$  tel que,

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla h_i(x^*) = 0. \tag{**}$$

(\*\*) Est appelée équation de Lagrange.

(\*) Condition de qualification des contraintes.

**Remarque 1.4.1.** — La recherche des points stationnaires du problème se ramène à la résolution du système (si la solution existe) de l'équation (\*\*).

- Les gradients  $\nabla f$  et  $\nabla h$  sont orthogonaux aux courbes de niveau de  $f$  et  $h$  respectivement.
- Si  $x^*$  est extremum de  $f$  sous la contrainte  $h$  et les gradients  $\nabla f(x^*)$  et  $\nabla h(x^*)$  non nuls, les courbes de niveau de  $f$  et  $h$  sont tangentes en  $x^*$ .

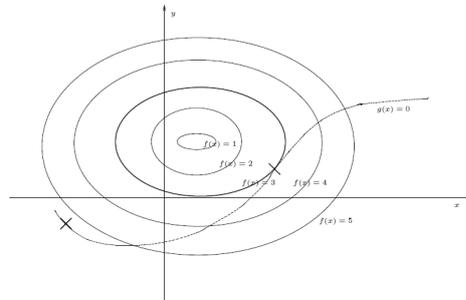


FIGURE 1.3 – Interprétation géométrique des multiplicateurs de Lagrange.

**Remarque 1.4.2.** Les multiplicateurs de Lagrange mesurent combien la fonction objectif doit être modifiée pour obtenir la solution optimale tout en respectant les contraintes.

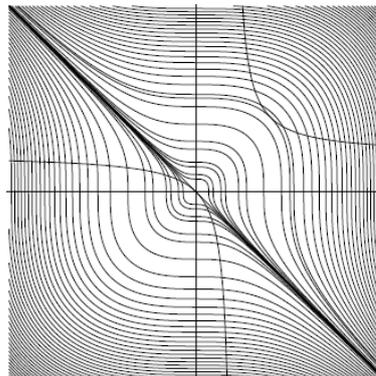


FIGURE 1.4 – Les courbes de niveau de  $f$  et  $h$  sont tangentes.

*Démonstration.* On se contente de l'ensemble  $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : h(x) = 0\}$ . La généralisation sur  $\mathbb{R}^n$  reste la même.

La condition (\*) indique que  $\nabla h(x^*) = 0$ . On suppose que  $\partial h / \partial x_2 \neq 0$ .

Ceci nous permet d'appliquer le théorème des fonctions implicite,  $h(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow x_2 = \alpha(x_1)$ ,  $\alpha$  une fonction continue et dérivable.

Maintenant, appliquant les équations d'Euler sur  $f$  et  $h$ , pour  $i = \{1, \dots, n - 1\}$ , on aura

$$\partial f / \partial x_1(x_1^*, \alpha(x_1^*)) + \partial f / \partial y(x_1^*, \alpha(x_1^*)) \alpha'(x_1^*) = 0 \tag{1.5}$$

$$\partial h / \partial x_1(x_1^*, \alpha(x_1^*)) + \partial h / \partial x_2(x_1^*, \alpha(x_1^*)) \alpha'(x_1^*) = 0 \tag{1.6}$$

De (1.5) et (1.6) on trouve,

$$\nabla f(x^*) + \lambda \nabla h(x^*) = 0,$$

Tel que,

$$\lambda = [\partial h / \partial x_2(x^*)]^{-1} \times \partial h / \partial x_2(x^*).$$

□

**Exemple 1.4.2.**  $f(x, y, z) = (x - 2)^2 + y^2 + z^2$  sous la contrainte  $g : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ .

Le gradient est,  $\nabla g(x, y, z) = (2x, 4y, 6z)^T$ ,

$\nabla g(x, y, z) \neq 0$  car la contrainte  $g$  n'est pas active au point  $(0, 0, 0)$ . La contrainte est qualifiée.

Les équations de Lagrange sont,

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1 \\ x - 2 = \lambda x \\ y = 2\lambda y \\ z = 3\lambda z \end{cases}$$

## 1.4.2 Interprétation de la valeur du multiplicateur $\lambda$ (analyse de sensibilité)

Soit le problème  $(p)$ , ( $f$  dif.)

$$\begin{cases} \text{Min } f(x) \\ \text{s.c } h(x) = b \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Considérons la fonction  $V(b)$ , qui donne la valeur optimale du problème  $(p)$  pour une valeur  $b$  donnée. Si on varie la valeur de  $b$ , alors la valeur de la solution optimale varie. A partir de ça, on peut définir la fonction  $x(b)$  comme,

$$V(b) = f(x(b)) \text{ et } h(x(b)) = b.$$

Maintenant, Mesurant la variation de  $V(b)$ ,

$$\begin{aligned} V'(b) &= \frac{dV}{db}, \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{db} + \dots + \frac{\nabla f}{\nabla x_n} \frac{dx_n}{db}, \\ &= \lambda \left( \frac{\partial h}{\partial x_1} \frac{dx_1}{db} + \dots + \frac{\nabla h}{\nabla x_n} \frac{dx_n}{db} \right), \\ &= \lambda \frac{db}{db}, \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

**Conséquence :** le multiplicateur  $\lambda$  est sensible à la variation de la valeur de  $b$  et il donne l'information sur le taux de variation de la valeur de la fonction objective lorsque  $b$  augmente. Un multiplicateur élevé indique que la contrainte est contraignante (l'ajustement des ressources est coûteux), tandis qu'un multiplicateur faible indique que la contrainte est moins importante (l'ajustement est peu coûteux).

**Calcul directe :** On peut approcher la fonction  $V$  par son polynôme autour de  $b'$ ,

$$V(b) = V(b') + V'(b')(b - b') = V(b') + \lambda(b - b').$$

**Remarque 1.4.3.** L'interprétation géométrique des multiplicateurs les associe à la tangence des contraintes, tandis que leur interprétation économique les considère comme des coûts marginaux ou des prix d'ajustement.

### 1.4.3 Contraintes de type inégalité

Soit l'ensemble des contraintes  $S$  définit par,

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : g_1(x) \leq 0, \dots, g_m(x) \leq 0\}.$$

**Définition 1.4.3.** On dit qu'une contrainte  $g$  est active en  $x^*$  si,

- $g(x^*) = 0$ ,
- L'ensemble des indices des contraintes actives est,

$$I(x^*) = \{i / g_i(x^*) = 0\}.$$

- L'ensemble des vecteurs  $E(x)$  qui active  $g$  est,

$$E(x) = \{x \in \mathbb{R}^n, g_j(x) = 0, j \in I\}.$$

**Théorème 1.4.2.** (CN1) Soit  $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ . On suppose que  $f$  admet en  $x^* \in S$  un minimum local et qu'il existe un vecteur  $v \in \mathbb{R}^n$  tel que,

$$\forall j g_j(x^*) = 0 \Rightarrow \langle \nabla g_j(x^*), v \rangle \leq 0 \quad (*)$$

Alors il existe des multiplicateurs de Kuhn et Tucker  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m \in \mathbb{R}$  tel que,

$$\nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^m \mu_j \nabla g_j(x^*) = 0. \quad (**)$$

Avec

$$\begin{cases} \mu_j \geq 0, & \text{(Positivité)} \\ \mu_j g_j(x^*) = 0, & \text{(Relation d'exclusion).} \end{cases}$$

(\*\*) Est appelée équation de Lagrange.

(\*) Condition de qualification des contraintes.

*Démonstration.* 1. Les deux relations d'exclusion et (\*\*) sont une conséquence directe du théorème 1.4.1 ( car il suffit de prendre  $\mu_j = 0$  pour  $j \notin I$ ).

2. Maintenant, on montre la positivité par absurde :

Supposons qu'il existe  $\mu_k < 0, k \in I$ .

D'autre part, on définit  $y \in \mathbb{R}^n$  tel que :

$$\nabla g_j(x^*)y = 0, \quad j \in I,$$

$$\nabla g_k(x^*)y = -1, \quad j \neq k.$$

Alors,  $y$  est une direction admissible,

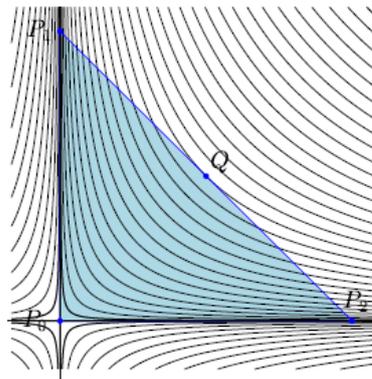
$$\begin{aligned} \nabla f(x^*)^T y &= - \sum_{j=1}^m \mu_j \nabla g_j(x^*)^T y, \\ &= -\mu_k \nabla g_k(x^*)^T y, \\ &= \mu_k < 0. \end{aligned}$$

Ceci est impossible car  $x^*$  est un point minimum de  $f$ .

□

**Exemple 1.4.3.** Soit la fonction  $f(x, y) = -xy$  à minimiser sur le domaine  $S$

$$x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 6.$$

FIGURE 1.5 – Les lignes de niveau de  $-xy$  sur le domaine  $S$ 

#### 1.4.4 Le théorème de Kuhn-Tucker avec lagrangien généralisé

Dans le cadre général du théorème de Kuhn et Tucker, la contrainte  $S$  est de la forme,

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n, g_j(x) \leq 0, h_i(x) = 0\}.$$

On suppose que  $f$  admet en  $x^* \in X$  un minimum local et qu'il existe un vecteur  $v \in \mathbb{R}^n$  tel que,

$$\langle \nabla h_i(x^*), v \rangle = 0,$$

$$\forall j \in I(x^*) \langle \nabla g_j(x^*), v \rangle \leq 0.$$

Où  $I(x^*)$  l'ensemble des indices des contraintes actives au point  $x^*$ .

Alors il existe des multiplicateurs  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$  et  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m \in \mathbb{R}$  tel que,

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla h_i(x^*) + \sum_{j=1}^m \mu_j \nabla g_j(x^*) = 0.$$

Sous les conditions des deux théorèmes 2.3.1 et 2.3.2.

## 1.5 Conditions suffisantes d'optimalité

Rappelant les deux cas suivants :

Le Lagrangien associé au (PCE) est :

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^p \lambda_i h_i(x).$$

Le Lagrangien associé au (PCI) est :

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x).$$

**Théorème 1.5.1.** Soit  $x^* \in \mathbb{R}^n$  un point régulier. Alors il existe  $\lambda^*$  tel que,

- $\nabla L(x^*, \lambda^*) = 0$
- $d^T \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*) d \geq 0, d \neq 0$  direction admissible

*Démonstration.* Puisque  $x^*$  est minimum, on a  $\nabla_{xx}^2 f(x^*) \geq 0$  Et donc par les équations d'Euler,

$$d^T \nabla_{xx}^2 f(x^*) d + \nabla f(x^*)^T d' \geq 0. \quad (1.7)$$

D'autre part,

$$d^T \nabla_{xx}^2 h(x^*) d + \nabla h(x^*)^T d' = 0. \quad (1.8)$$

En multipliant par  $\lambda_i$  la relation 1.8 puis on fait la somme avec la relation 1.7, on aura

$$d^T (\nabla_{xx}^2 (f(x^*) + \sum_{i=1}^p \nabla^2 h_i(x^*) \lambda_i) d + (\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla h_i(x^*)^T) d' \geq 0.$$

Et comme  $\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla h_i(x^*)^T = 0$ . L'inégalité est vérifiée.

□

**Théorème 1.5.2.** (CS) pour (PCE)

Soit  $x^* \in \mathbb{R}^n$  et  $\lambda^* \in \mathbb{R}^p$  vérifiant,

- $\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) = 0,$
- $h_i(x^*) = 0,$
- $d^T \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*) d \geq 0, d \neq 0.$

Alors  $x^*$  est un point minimum du problème.

**Théorème 1.5.3.** (CS) pour (PCI)

Soit  $x^* \in \mathbb{R}^n$  et  $\mu^* \in \mathbb{R}^m$  vérifiant,

- $\nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^m \mu_j^* \nabla g_j(x^*) = 0,$
- $g_j(x^*) \leq 0,$
- $\mu_j \geq 0,$
- $\mu_j g_j(x^*) = 0,$
- $d^T \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*) d \geq 0, d \neq 0.$

Alors  $x^*$  est un point minimum du problème.