المحور الرابع: طريقة السمبلكس Simplex Method:

حالات خاصة في طريقة السمبلكس لحل النموذج الرياضي:

1- دورانية الحل "التكرار" : Degeneracy.

2- عدم وجود حل ممكن: Infeasible Solution.

3- تعدد الحلول المثلى: Multiple Optimal Solution.

4- منطقة الحل غير محدودة: Unbounded Solution.

أولاً- دورانية الحل

تحدث هذه الحالة عندما يكون هناك قيد فائض لا حاجة له.

مثال:

$$MAX\ Z = 3X_1 + 9X_2$$

$$S.T:$$

$$X_1 + 4X_2 \leq 8$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

من الشكل نجد أن القيد الأول $X_1 + 4X_2 \leq 8$ غير ضروري لأنه قد تحددت منطقة الحل باستخدام القيد الثاني دون الحاجة إلى القيد الأول، وبطريقة السمبلكس نستطيع أن نبين حالة الدوران هذه كما يلي:

رقم الجدول	$Basic$	X_1	X_2	S_1	S_2	Solution
0	Z	-3	-9	0	0	0

	S_1	1	4	1	0	8
	S_2	1	2	0	1	4
1	Z	$-3/4$	0	$9/4$	0	18
0	X_2	$1/4$	1	$1/4$	0	2
	S_2	$1/2$	0	$-1/2$	1	0
2	Z	0	0	$3/2$	$3/2$	18
	X_2	0	1	$1/2$	$-1/2$	2
	X_1	1	0	-1	2	0

نلاحظ من الجدول أن قيمة Z لم تتغير مع خروج ودخول المتغير X_1، ولكنها بقيت نفس القيمة، وهذا ما يدعى بدورانية الحل.

ثانيا – عدم وجود حل ممكن Infeasible Solution :

وتحدث هذه الحالة عندما يكون أحد قيود المسألة من نوع أصغر من أو يساوي ≥ والقيد الآخر من نوع أكبر من أو يساوي ≤.

مثال:

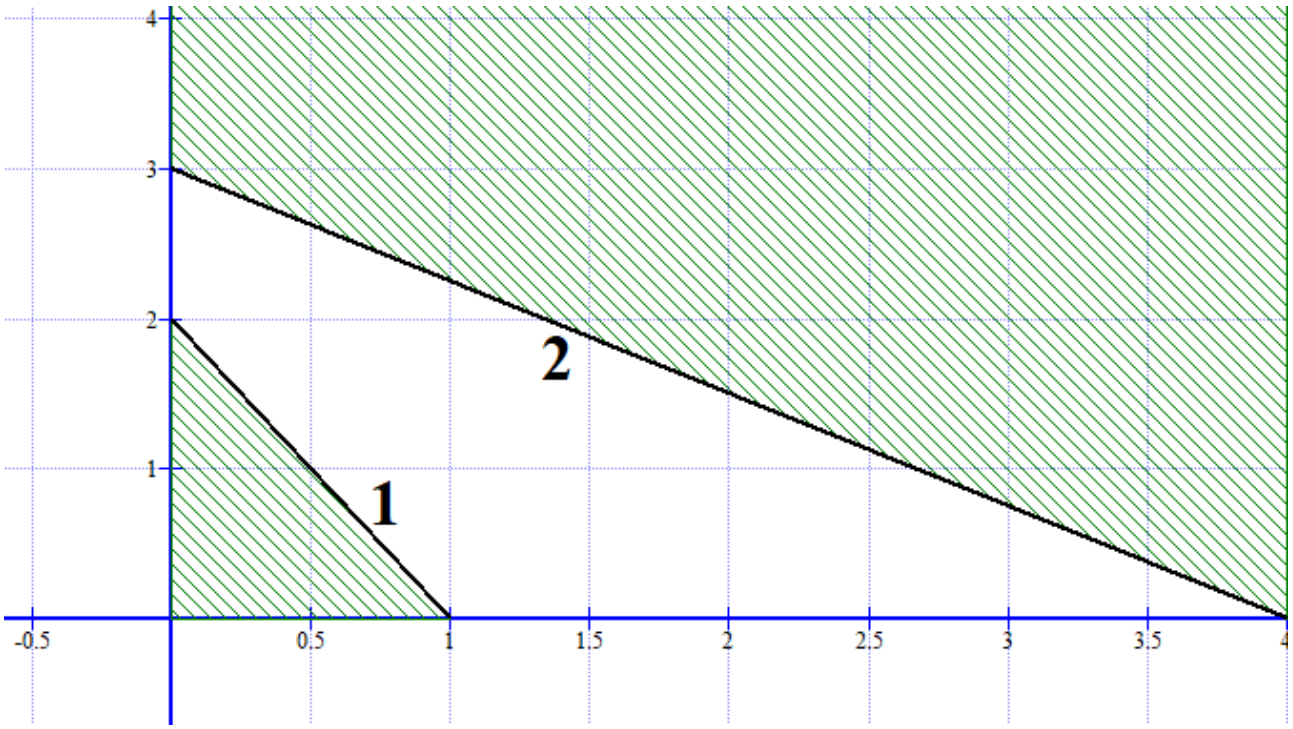
$$MAX\ Z = 3X_1 + 2X_2$$

$$S.T:$$

$$2X_1 + X_2 \leq 2$$

$$3X_1 + 4X_2 \geq 12$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$



وبطريقة السمبلكس يمكن توضيحها كما يلي:

رقم الجدول	$Basic$	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	Solution
-1	Z	0	0	0	0	M	0
	S_1	2	1	1	0	0	2
	R_1	3	4	0	-1	1	12
0	Z	$-3-3m$	$-2-4m$	0	M	0	$-12m$
	S_1	2	1	1	0	0	2
	R_1	3	4	0	-1	**1**	12
1	Z	$1+5m$	0	$2+4M$	M	**0**	$4-4m$
	X_2	2	1	1	0	0	2
	R_1	-5	0	-4	-1	1	**4**

من الجدول يتضـــح أنه لا يوجد حل للمشـــكلة وذلك من خلال قيمة R_1 الموجبة، مع ملاحظة أن جميع معاملات دالة الهدف موجبة والتي تمثل حالة الحل الأمثل.

ملاحظة: إذا كانت المسـألة Minimize عندها لن يكون هناك حل إذا كانت قيمة سـالبة R_1، وتكون جميع معاملات دالة الهدف سالبة.

ثالثاً: تعدد الحلول المثلى Multiple Optimal Solution

وهو وجود أكثر من قيمة للمتغيرات لحل دالة الهدف.

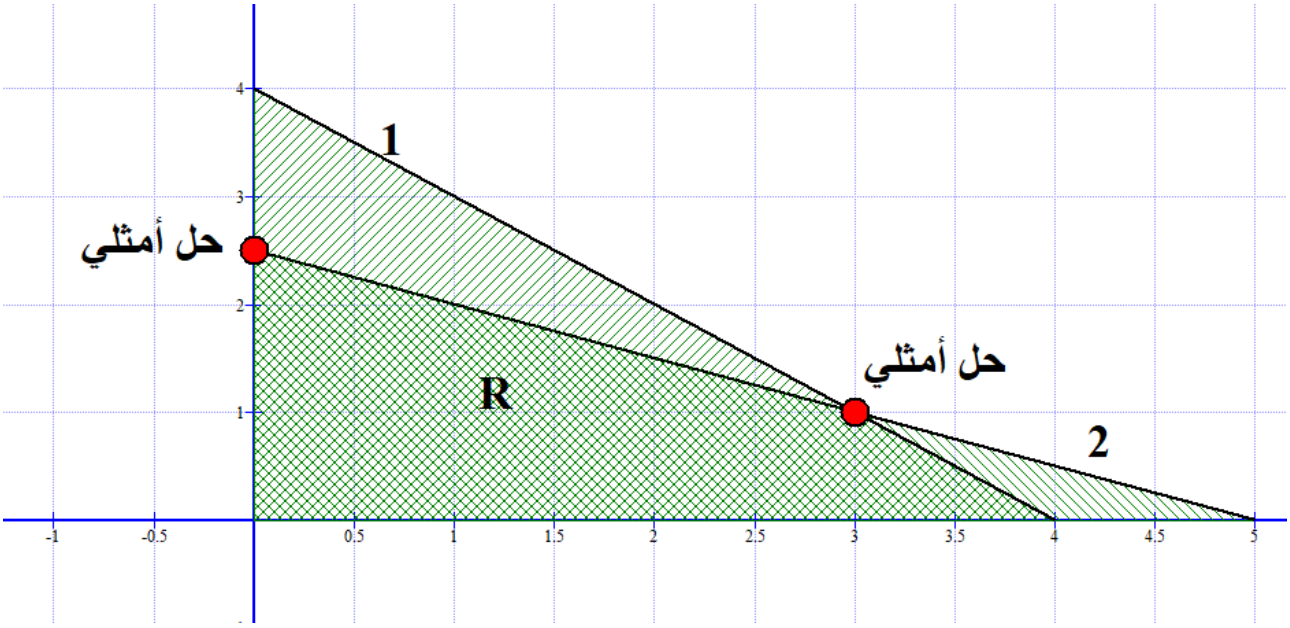
$$MAX\ Z = 2X_1 + 4X_2$$

$$S.T:$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 5$$

$$X_1 + X_2 \leq 4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$



وبطريقة السمبلكس يمكن توضيحها بالحل التالي:

رقم الخطوة	$Basic$	X_1	X_2	S_1	S_2	Solution	
0	Z	-2	-4	0	0	0	
	S_1	1	2	1	0	5	
	S_2	1	1	0	1	4	
1	Z	0	0	2	0	10	
	X_2	$1/2$	1	$1/2$	0	$5/2$	

	S_2	$1/2$	0	$-1/2$	1	$3/2$	الحل الأمثل الأول
2	Z	0	0	2	0	10	الحل الأمثل الثاني
	X_2	0	1	1	-1	1	
	X_1	1	0	-1	2	3	

من الجدول يتضح أن هناك حلين لهذه المسألة الأول ينتج من الخطوة رقم1 وهو:

$$X_2 = 5/2\,, X_1 = S_1 = 0,\ \ S_2 = 3/2\ \ and\ Z = 10$$

أما الحل الثاني فهو: $S_1 = S_2 = 0,\ \ X_1 = 3,\ \ X_2 = 1\ \ \ and\ Z = 10$

هذه النوعية من المسائل تفيد الإدارة في اتخاذ القرار المناسب ضمن البدائل المتاحة.

رابعًا – منطقة الحل غير المحدودة:

مثال 1:

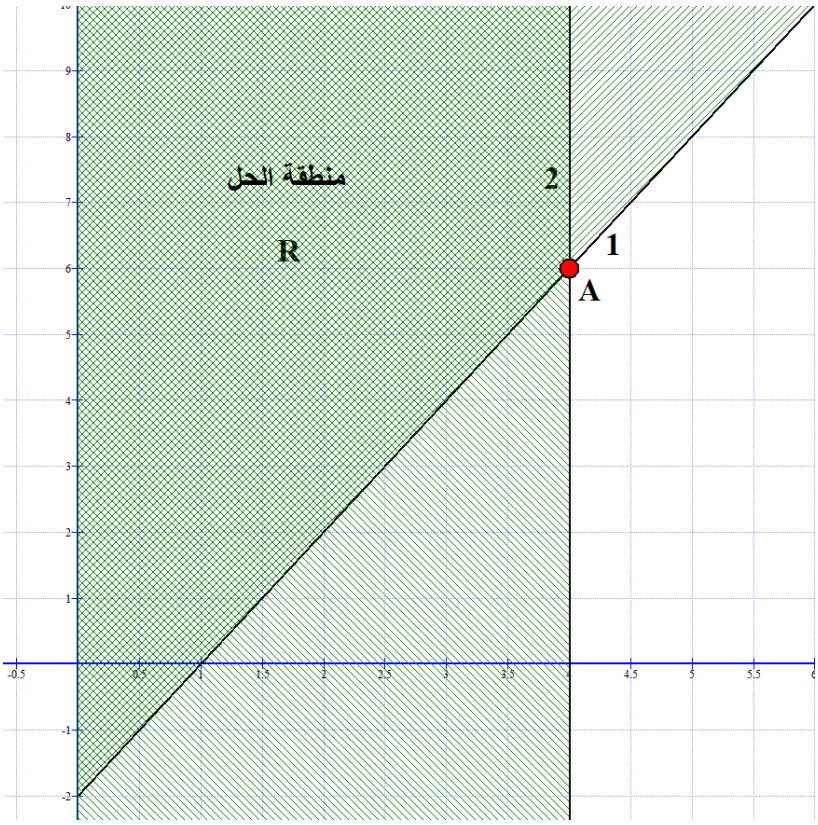
$$MAX\ \ Z = 6X_1 - 2X_2$$

$$S.T:$$

$$2X_1 - X_2 \geq 2 \ldots.1$$

$$X_1 \leq 4 \ldots..2$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$



رقم الخطوة	$Basic$	X_1	X_2	S_1	S_2	Solution
0	Z	-6	2	0	0	0
خارج $\rightarrow$	S_1	2	$\mathbf{-1}$	1	0	2
	S_2	1	$\mathbf{0}$	0	1	4
1	Z	0	$\mathbf{-1}$	3	0	6
	X_2	1	$1/2$	$1/2$	0	1
خارج $\rightarrow$	S_2	0	$1/2$	$-1/2$	1	3
2	Z	0	0	2	2	12
	X_1	1	0	0	1	4
	X_2	0	1	-1	2	6

من خلال الجدول نستطيع أن نعرف أن منطقة الحل غير محدودة، وذلك إذا ظهرت معاملات سالبة في أعمدة المتغيرات الداخلة "غير السالبة" Non Basic في جدول الحل الابتدائي، كما يشير المستطيل في هذا المثال إلى هذه الحالة.

نســتطيع القول أنه إذا كان معامل Z للمتغير الداخل موجبًا والعمود الذي تحته يحتوي على متغيرات ســالبة فإن هناك حلاً مثاليًا وحيدًا رغم أن منطقة الحل غير محدودة، أما إذا وجد معامل Z ســـالبًا وعمود المتغيرات أيضاً يحتوي على سالب في جدول الحل الابتدائي، فإن منطقة الحل تكون غير محدودة، كما في المثال التالي:

$$MAX\ Z = 2X_1 + X_2$$

$$S.T:$$

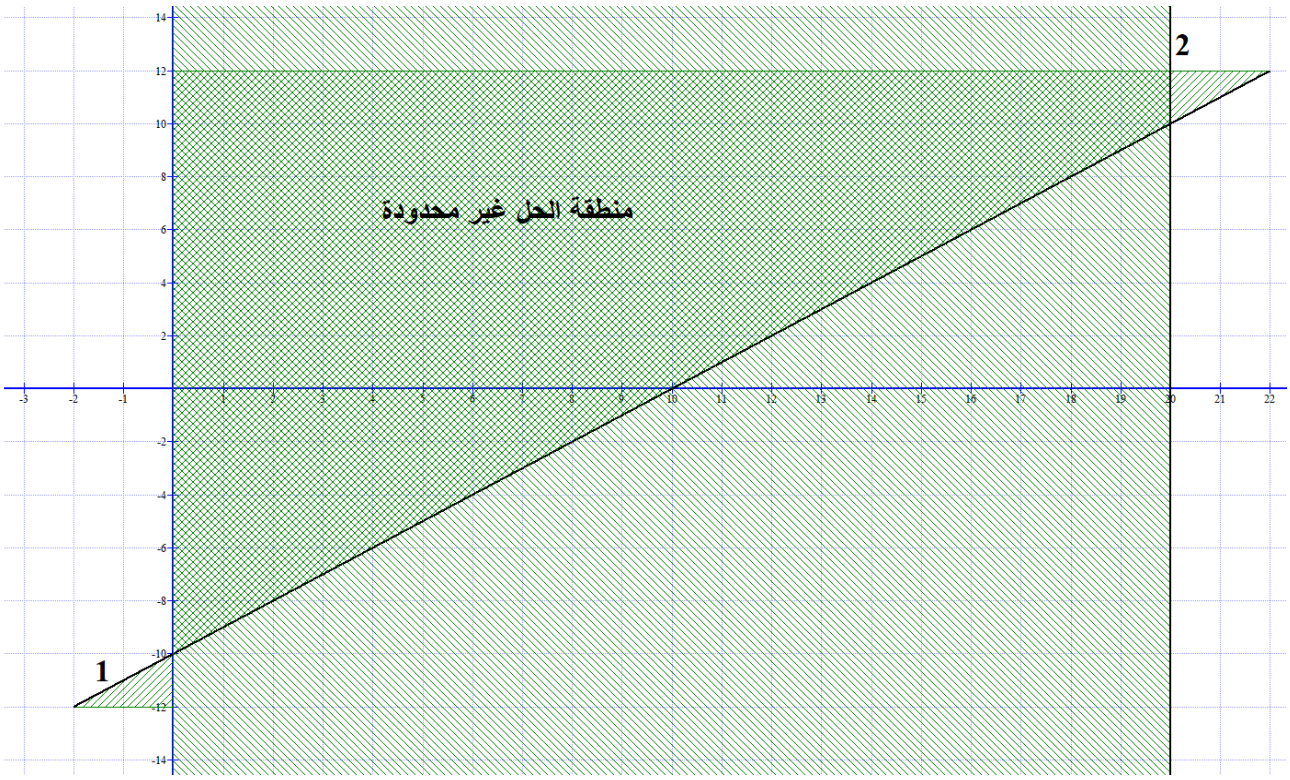
$$X_1 - X_2 \leq 10$$

$$2X_1 \leq 40$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

رقم الخطوة	$Basic$	X_1	X_2	S_1	S_2	Solution
0	Z	-2	-1	0	0	0
	S_1	1	$\mathbf{-1}$	1	0	10
	S_2	2	**0**	0	1	40
1	Z	0	$\mathbf{-3}$	2	0	20
	X_1	1	-1	1	0	10
	S_2	0	2	-2	1	20
2	Z	0	0	-1	$3/2$	50
	X_1	0	0	0	$3/2$	20
	X_2	0	1	-1	$1/2$	10

والرسم التالي يوضح هذه الحالة:


منطقة الحل غير محدودة
1
2

تمارين غير محلولة (الفصل الثاني):

1-خصّص مدير المبيعات لإحدى الشركات مبلغًا قدره 120000دينار للإعلان في السنة القادمة، البرنامج الإعلاني المقترح وضّح خطة لنشر الإعلان في مجلتين أسبوعيتين:

- تكلفة الإعلان في الأسبوع في المجلة الأولى 2000 دينار وفي المجلة الثانية 5000 دينار.
- ومن الخبرة السابقة يرى مدير المبيعات أنه يجب نشر الإعلان لفترة لا تقل عن 20 أسبوع في المجلة الأولى و10 أسابيع في المجلة الثانية، كما يرى أنه لا داعي للنشر في أيٍّ من المجلتين لمدة تزيد عن 50 أسبوعًا.

المطلوب: اكتب البرنامج الخطي للمسألة مع العلم أن الشركة ترغب في تكرار هذا الإعلان إلى أكبر درجة ممكنة.

2-مصنع ينتج سيارات وحافلات والمطلوب تحديد أكبر كمية إنتاج ممكنة من السيارات والحافلات وذلك في ضوء القيود الآتية:

- الميزانية المخصَّصة للإنتاج 10 مليون دولار ويتكلف إنتاج الحافلة الواحدة 25 ألف دولار والسيارة 10 آلاف دولار.
- حجم الطلب المتوقع قدِّر بحوالي 200 حافلة و250 سيارة.

3-مصنع متخصِّص في إنتاج منتوجين هما W_2 , W_1, ويقوم بعملية الإنتاج في ثلاث ورشات A,B,C ظروف الإنتاج ملخصة في الجدول التالي:

	A	B	C	تكاليف الإنتاج
W_1	1/2 سا	1/4 سا	1 سا	350دج
W_2	3/2 سا	2/3 سا	1/2 سا	650دج

مع العلم أن عدد الدقائق المتاحة في الورشات الثلاثة على التوالي هي: 20000د و35000 د و18000د.

المطلوب: اكتب البرنامج الخطي مع العلم أن سعر بيع الوحدة لـ W_1 هو 480دج، و لـ W_2 هو 850دج.

4- لدى مؤسسة خطة الإنتاج السنوية 8000 وحدة من P_2 الطلب في السوق محدود ب 9000 وحدة من P_2. فيما يلي ظروف الإنتاج:

- الورشة A تتطلب 3سا لإنتاج المنتوج P_1 و 4سا لإنتاج P_2
- الورشة B تتطلب ساعتين لإنتاج P_2 وساعة واحدة لإنتاج P_1
- الطاقة الإنتاجية في A هي400 ساعة وفي B هي 500 ساعة.
- الطاقة الإنتاجية بالنسبة لـ P_1 تقدر بـ 700 وحدة والطلب في السوق غير محدود بالنسبة لـ P_1