Cours de la théorie des graphes
Pour les étudiants de la troisième année Mathématiques appliquées
Département de mathématiques
Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf, Mila
Anné universitaire 2023/2024

Chapitre 3, Arbres et arborescences

Table des matières

0.1 Graphe orienté

En donnant un sens aux arêtes d'un graphe, on obtient un digraphe (ou graphe orienté). Le mot « digraphe » est la contraction de l'expression anglaise « directed graph ».
Un digraphe fini G = (V,E) est défni par l'ensemble V = $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ dont les éléments sont appelés sommets, et par l'ensemble E = $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$ dont les éléments sont appelés arcs.
Un arc e de l'ensemble E est défini par une paire ordonnée de sommets. Lorsque e = (u,v), on dit que l'arc e va de u à v. On dit aussi que u est l'extrémité initiale et v l'extrémité finale de e.

0.1.1 Degré d'un sommet d'un digraphe

Soit v un sommet d'un graphe orienté.
On note $d^+(v)$ le degré extérieur du sommet v, c'est-à-dire le nombre d'arcs ayant v comme extrémité initiale.
On note $d^-(v)$ le degré intérieur du sommet v, c'est-à-dire le nombre d'arcs ayant v comme extrémité finale.
On définit le degré : $d(v) = d^+(v) + d^-(v)$

0.1.2 Chemins et circuits

Un chemin conduisant du sommet a au sommet b est une suite ayant pour éléments alternativement des sommets et des arcs, commençant et se terminant par un sommet, et telle que chaque arc est encadré à gauche par son sommet origine et à droite par son sommet destination. On ne peut donc pas prendre les arc à rebours. Sur le digraphe ci-après, on peut voir par exemple le chemin $(v_3, e_2, v_2, e_1, v_1)$. Par convention, tout chemin comporte au moins un arc.
On appelle distance entre deux sommets d'un digraphe la longueur du plus petit chemin les reliant. S'il n'existe pas de chemin entre les sommets x et y, on pose d(x,y) = ∞. Par exemple, sur le digraphe ci-dessous, $d(v_5, v_4) = 2$, $d(v_4, v_5) = \infty$, $d(v_3, v_1) = 1$.
Un circuit est un chemin dont les sommets de départ et de fin sont les mêmes. Le digraphe ci-dessus ne contient pas de circuit.
Les notions de chemins et de circuits sont analogues à celles des chaînes et des cycles pour les graphes non orientés. **Digraphe fortement connexe** Un digraphe est fortement connexe, si toute paire ordonnée (a,b) de sommets distincts du graphe est reliée par au moins un chemin. En d'autres termes, tout sommet est atteignable depuis tous les autres sommets par au moins un chemin.

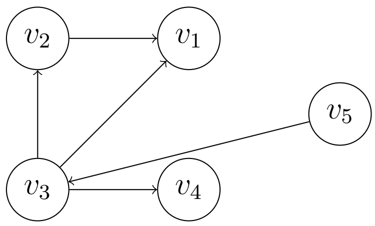

FIGURE 1 – G

On appelle composante fortement connexe tout sous-graphe induit maximal fortement connexe (maximal signifie qu'il n'y a pas de sous-graphe induit connexe plus grand contenant les sommets de la composante).

0.1.3 Représentations non graphiques des digraphes

Matrice d'adjacences On peut représenter un digraphe par une matrice d'adjacences. Une matrice (n×m) est un tableau de n lignes et m colonnes. (i, j) désigne l'intersection de la ligne i et de la colonne j.
Dans une matrice d'adjacences, les lignes et les colonnes représentent les sommets du graphe. Un « 1 » à la position (i, j) signifie qu'un arc part de i pour rejoindre j.

Cette matrice a plusieurs caractéristiques :

1. Elle est carrée : il y a autant de lignes que de colonnes.
2. Il n'y a que des zéros sur la diagonale. Un « 1 » sur la diagonale indiquerait une boucle.
3. Contrairement à celle d'un graphe non orienté, elle n'est pas symétrique.
4. Une fois que l'on fixe l'ordre des sommets, il existe une matrice d'adjacences unique pour chaque digraphe. Celle-ci n'est la matrice d'adjacences d'aucun autre digraphe.

0.1.4 Algorithme de Dijkstra

Edgser Wybe Dijkstra (1930-2002) a proposé en 1959 un algorithme qui permet de calculer le plus court chemin entre un sommet particulier et tous les autres. Le résultat est une arborescence, c'est-à-dire un arbre avec un sommet particulier appelé racine. Numérotons les sommets du graphe G = (V,E) de 1 à n. Supposons que l'on s'intéresse aux chemins partant du sommet 1. On construit un vecteur $\lambda = (\lambda(1), \lambda(2), \lambda(3), ..., \lambda(n)$ ayant n composantes tel que $\lambda(j)$ soit égal à la longueur du plus court chemin allant de 1 au sommet j.

On initialise ce vecteur à c_{1j} , c'est-à-dire à la première ligne de la matrice des coûts du graphe, définie comme indiqué ci-dessous :

$$c_{ij} = \begin{cases} 0 & sii = j, \\ \infty & sii \neq jet(i,j)n'appartientE, \\ \delta(i,j) & sii \neq jet(i,j) \in E. \end{cases}$$

où $\delta(i,j) > 0$ est le poids de l'arc (i,j).
On construit un autre vecteur p pour mémoriser le chemin pour aller du sommet 1 au sommet voulu. La valeur $p(i)$ donne le sommet qui précède i dans le chemin.
On considère ensuite deux ensembles de sommets, S initialisé à $\{1\}$ et T initialisé à $\{2, 3, ..., n\}$. À chaque pas de l'algorithme, on ajoute à S un sommet jusqu'à ce que S = V de telle sorte que le vecteur λ donne à chaque étape la longueur minimale des chemins de 1 aux sommets de S.
Résumé de l'algorithme de Dijkstra
On suppose que le sommet de départ (qui sera la racine de l'arborescence) est le sommet numéroté 1. Notons qu'on peut toujours renuméroter les sommets pour que ce soit le cas.
Initialisations
$\lambda(j) = c_1$ et $p(j)$ = NIL, pour $1 \leq j \leq$ n.
Pour $2 \leq j \leq$ n faire
Si $c_{1j} < \infty$ alors $p(j) = 1$.
S=$\{1\}$, T = $\{2, 3, ..., n\}$.
Itérations
Tant que T n'est pas vide faire
Choisir i dans T tel que $\lambda(i)$ est minimum
Retirer i de T et l'ajouter à S
Pour chaque successeur j de i, avec j dans T , faire
Si $\lambda(j) > \lambda(i) + \delta(i,j)$ alors $\lambda(j) = \lambda(i) + \delta(i,j)$
$p(j) = i$
Exerice
Appliquez l'algorithme de Dijkstra au graphe ci-dessous pour trouver tous les plus courts chemins en partant du sommet 5.