المركز الجامعي عبد الحفيظ بوالصوف ميلة

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

السنة الأولى ماستر : اقتصاد نقدي و مالي

المحاضرة الثالثة : الانحدار الخطي المتعدد (THE MULTIPLE LINEAR MODEL)

من إعداد الأستاذ : لفيلف عبد الحق

أستاذ بالمركز الجامعي ميلة

دكتوراه في العلوم المالية والمصرفية

السنة الجامعية 2023 –2024

تمهيد:

تعرضنا في المحاضرات السابقة لنموذج الانحدار الخطي البسيط الذي يمثل اللبنة الابتدائية والأساسية لتقنية الانحدار العام، لكن كما هو معلوم في الواقع الاقتصادي لا يمكن الاعتماد على متغير مستقل واحد لتفسير تغيرات متغير آخر تابع، فعلى سبيل المثال لا يمكننا أن نقول أن سعر سلعة ما يتبع فقط الطلب عليها، إنما يتحدد السعر بالعديد من العوامل على غرار التكلفة، أسعار السلع المكملة، أسعار السلع المنافسة، الأذواق إلى غير ذلك من المتغيرات الأخرى، ولغرض تقليل أخطاء التقدير إلى أقصى حد ممكن صار من الضروري إدراج كل المتغيرات المفسرة أو معظمها على الأقل لتفسير أعلى وأدق للمتغير التابع، من هنا يعتبر نموذج الانحدار الخطي المتعدد امتداد لنموذج الانحدار الخطي البسيط بإضافة على الأقل متغير مستقل إضافي، أين يصبح إجمالي المتغيرات قيد الدراسة على الأقل ثلاثة متغيرات (متغير تابع ومتغيرين مستقلين على الأقل).

1. الصياغة الرياضية للنموذج الخطي العام:

يفترض نموذج الانحدار الخطي المتعدد وجود علاقة خطية بين متغير تابع y_i وعدد من المتغيرات المستقلة x_{kt} على النحول التالي:

$$y_t = a_0 + a_1x_{1t} + a_2x_{2t} + \cdots + a_kx_{kt} + \varepsilon_t \;\; : t = 1, \dots, n$$

حيث يمثل كل من:

y_t: المتغير التابع في الفترة t.

x_{1t}: المتغير المستقل الأول في الفترة t.

x_{kt}: المتغير المستقل k في الفترة t.

$a_0, a_1, \dots, a_k$: معلمات النموذج.

ε_t: خطأ التحديد (وهو مجهول ويبقى مجهولا).

n: عدد المشاهدات.

بناءا على المعادلة أعلاه يمكننا كتاب نظام المعادلات التالي لكل مشاهدة على النحول التالي:

$$\begin{cases} y_1 = a_0 + a_1x_{11} + a_1x_{21} + \cdots + a_kx_{k1} + \varepsilon_1 \\ y_2 = a_0 + a_1x_{12} + a_1x_{22} + \cdots + a_kx_{k2} + \varepsilon_2 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad . \\ y_n = a_0 + a_1x_{1n} + a_1x_{2n} + \cdots + a_kx_{kn} + \varepsilon_n \end{cases}$$

كما يمكن تحويل النموذج أعلاه إلى الشكل المصفوفي التالي:

$$\underset{(n,1)}{Y} = \underset{(n,k+1)}{X}\ \underset{(k+1,1)}{a} + \underset{(n,1)}{\varepsilon}$$

منه يكون الشكل المصفوفي:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}_{(n,1)} ;X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{kn} \end{bmatrix}_{(n,k+1)} ;a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix}_{(k+1,1)}$$

$$;\ \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_k \end{bmatrix}_{(n,1)}$$

نلاحظ في المصفوفة X أن العمود الأول مشكل من الرقم 1 فقط وهذا دلالة على الحدث الثابت، كما تجدر الإشارة إلى أن الأرقام بين الأقواس سواء في الشكل الخطي أو المصفوفي تمثل أبعاد المصفوفة حيث يمثل العدد الأول عدد الأسطر والعدد الثاني عدد الأعمدة.

2. التقدير بواسطة طريقة المربعات الصغرى:

بنفس طريقة نموذج الانحدار الخطي البسيط ونفس المنهجية لدينا نموذج الانحدار المتعدد التالي:

$$Y = X\,a + \varepsilon$$

حيث أن مجاهيل النموذج هي a وε والمصفوفتين Y وX هما معطيات التقدير، وكما في الانحدار الخطي البسيط سوف نعمد إلى تدنية مجموع مربعات البواقي $\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2$ وذلك كالتالي:

$$Y_t = X_t\,a + \varepsilon_t \rightarrow \varepsilon_t = Y_t - X_t\,a$$

منه تدنية مجموع مربعات البواقي يكون كالتالي:

$$Min \sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2 = Min\ \varepsilon'\varepsilon = Min(Y - Xa)'(Y - Xa) = Min\ S$$

أين تمثل ε' منقول المصفوفة ε Le transpose de matrice des erreurs.

$$S = (Y - Xa)'(Y - Xa) = (Y' - X'a')(Y - Xa)$$

$$S = Y'Y - Y'Xa - X'a'Y - X'a'Xa$$

وبما أن $Y'Xa = X'a'Y$ يصبح لدينا:

$$S = Y'Y - 2a'X'Y - a'X'Xa$$

وباشتقاق S بالنسبة ل a نحصل على:

$$\frac{\partial S}{\partial \mathrm{a}} = 0 - 2X'Y + 2X'Xa$$

وكما تجري العادة ولغرض تدنية المشتقة أعلاه نضعها تساوي الصفر:

$$\frac{\partial S}{\partial \mathrm{a}} = 0 \rightarrow -2X'Y + 2X'X\hat{a} = 0$$

وبما أن رتبة المصفوفة X هي k+1 فإن المصفوفة $X'X$ مصفوفة مربعة من الشكل (k+1, k+1) مما يعني قبولها لوجود معكوس $(X'X)^{-1}$ ومنه نجد:

$$2(X'X)\hat{a} - 2X'Y = 0 \rightarrow (X'X)\hat{a} - X'Y = 0 \rightarrow (X'X)\hat{a} = X'Y$$

وبضرب كلا طرفي المعادلة في $(\mathrm{X'X})^{-1}$ نتحصل على:

$$\boxed{\hat{a} = (X'X)^{-1}X'Y}$$

ولغرض التأكد من أن $\hat{a}$ هي قيمة دنيا ل S يجبب التحقق من الشرط الثاني للتدنية وهو ضرورة أن تكون المشتقة الثانية أكبر من 0:

$$\frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial \mathrm{a}a'} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{a}'}(-2X'Y + 2X'X\hat{a}) = 2X'X \geq 0$$

حيث أن $X'X$ مصفوفة معرفة موجبة ومنه $\hat{a}$ يدني S.

كما أن الشكل المصفوفي للعلاقة $\hat{a} = (\mathrm{X'X})^{-1}X'Y$ يكتب على النحو التالي:

$$(\mathrm{X'X}) = \begin{bmatrix} n & \sum_{t=1}^{n} x_{1t} & \sum_{t=1}^{n} x_{2t} & \cdots & \sum_{t=1}^{n} x_{kt} \\ \sum_{t=1}^{n} x_{1t} & \sum_{t=1}^{n} x_{1t}^2 & \sum_{t=1}^{n} x_{1t}\, x_{2t} & \cdots & \sum_{t=1}^{n} x_{1t}\, x_{kt} \\ \sum_{t=1}^{n} x_{2t} & \sum_{t=1}^{n} x_{2t}\, x_{1t} & \sum_{t=1}^{n} x_{2t}^2 & \cdots & \sum_{t=1}^{n} x_{2t}\, x_{kt} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{t=1}^{n} x_{kt} & \sum_{t=1}^{n} x_{kt}\, x_{1t} & \sum_{t=1}^{n} x_{kt}\, x_{2t} & \cdots & \sum_{t=1}^{n} x_{kt}^2 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن تقاطع العمود الأول مع السطر الأول يتمثل في القيمة n التي تعبر عن عدد المشاهدات وهذا راجع لضرب المصفوفة X في منقولها حيث أن العمود الأول للمصفوفة يمثل فقط الرقم 1 مما يعني أن السطر الأول للمنقول يمثل الرقم 1 فقط أيضا، ومن خلال الضرب سوف تكون عدد مرات ضرب 1 في نفسه هو n مرة لهذا القيمة هي n.

$$(X'Y) = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} y_t \\ \sum_{t=1}^{n} x_{1t} y_t \\ \sum_{t=1}^{n} x_{2t} y_t \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^{n} x_{kt} y_t \end{bmatrix}; \ \hat{a} = \begin{bmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_k \end{bmatrix}$$

3.5. نظرية Gauss-Markov:

على غرار نموذج الانحدار الخطي البسيط، فإن نظرية Gauss-Markov تنص على أن مقدرات طريقة المربعات الصغرى في نموذج الانحدار الخطي المتعدد بناءا على الفرضيات الموضحة أعلاه تمتاز بأصغر تباين الأمر، الذي يعني أنها أحسن التقديرات الخطية غير المتحيزة (BLUE (Best Linear Unbiased Estimator، كما أن قيمة التباين المقدر للأخطاء تعطى على الشكل التالي:

$$\hat{\delta}_{\varepsilon}^{2} = \frac{e'e}{n-k-1}$$

3. معادلة تحليل التباين:

بنفس طريقة نموذج الانحدار الخطي البسيط لدينا:

$$\sum_{t=1}^{n} y_t = \sum_{t=1}^{n} \hat{y}_t \ \rightarrow \ \bar{y} = \bar{y}; \ \sum_{t=1}^{n} e_t = 0$$

ومنه تكون معادلة تحليل التباين على النحو التالي:

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} \sum_{t=1}^{n} (y_t - \bar{y})^2 & = & \sum_{t=1}^{n} (\hat{y}_t - \bar{y})^2 & + & \sum_{t=1}^{n} e_t^2 \\ SCT & = & SCE & + & SCR \end{array}}$$

وكما أشرنا سابقا، فإن هذه المعادلة تسمح لنا بالحكم على جودة النموذج المقدر حيث كلما اقترب مجموع المربعات المفسرة إلى مجموع المربعات الكلية مقلصا بذلك مجموع مربعات البواقي كان النموذج ذو جودة عالية، ويمكننا حساب معامل التحديد على النحو التالي:

$$R^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(\hat{y}_t - \bar{y})^2}{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})^2} = 1 - \frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})^2}$$

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = 1 - \frac{SCR}{SCT}$$

حيث R^2 معامل التحديد و R معامل الارتباط بين y_t و$\hat{y}_t$، أما في حالة البيانات الممركزة أو لا يحتوي على الحدث الثابت يكتب معامل التحديد كالتالي:

$$R^2 = \frac{\hat{Y}'\hat{Y}}{Y'Y} = 1 - \frac{e'e}{Y'Y}$$

حيث كالعادة قيمة R^2 تتراوح بين 0 التي تمثل حالة عدم تفسير معادلة الانحدار تغيرات المتغير التابع Y، و1 حين يكون التفسير تاما وكاملا لمعادلة الانحدار للمتغير التابع (كل النقاط تقع على خط الانحدار)، ويمكننا استخراج علاقة تجمع بين معامل التحديد وشعاع المقدرات على النحو التالي:

$$R^2 = \frac{\hat{Y}'\hat{Y}}{Y'Y} = \frac{\hat{a}'X'X\hat{a}}{Y'Y}$$

ملاحظة:

من خلال معادلة حساب معامل التحديد أعلاه يتضح جليا أن معامل التحديد يعتمد أساسا على التغيرات التي تطرأ على المتغير التابع Y (المفسرة أو غير المفسرة)، هذا ما يجعله لا يأخذ بعين الاعتبار عدد المتغيرات المستقلة وعدد درجات الحرية، حيث أن إضافة متغيرات مستقلة جديدة للنموذج لا يقلل معامل التحديد، بل قد يزيد من قيمته، حيث أن إضافة متغير مستقل جديد للنموذج لن يؤثر على مجموع مربعات الانحرافات الكلية SCT بل يؤثر فقط على قيمة مجموع مربعات الانحرافات المفسرة SCE، لهذا الغرض يستعمل معامل آخر يسمى معامل التحديد المصحح أو المرجح، ويحسب على النحو التالي:

$$\bar{R}^2 = 1 - \left[\frac{n-1}{n-k-1}\ (1 - R^2)\right] = 1 - \frac{SCR/(n-k-1)}{SCT/(n-1)}$$

حيث نلاحظ أنه كلما ارتفعت قيمة n اتجه R^2 نحو $\bar{R}^2$ ($\bar{R}^2 \cong R^2$).

$$\lim_{n\to\infty} \bar{R}^2 = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n-k-1}\ (1 - R^2) = R^2$$

تجدر الإشارة إلى أن معامل التحديد المرجح قد يأخذ قيم سالبة حيث في هذه الحالة يتعامل معه على أساس أنه يساوي الصفر، كما أنه وسيلة أفضل لقياس جودة النموذج المقدر أفضل من معامل التحديد العادي، حيث يمكنه توضيح أهمية إضافة متغيرات مستقلة إضافية إلى النموذج من عدمه، إضافة إلى ذلك معامل التحديد المرجح هو نفسه معامل التحديد العادي في حالة نموذج الانحدار الخطي البسيط.

4. جدول تحليل التباين ANOVA:

بناءا على ما سبق يكون جدول تحليل التباين لنموذج الانحدار الخطي المتعدد كالتالي:

مصدر التغير	مجموع مربعات الانحرافات	عدد درجات الحرية	متوسط مربعات الانحرافات
المتغيرات المستقلة X	$SCE=\sum_{t=1}^{n}(\hat{y}_t-\bar{y})^2$	k	SCE/k
البواقي	$SCR=\sum_{t=1}^{n}e_t^2$	$n-k-1$	$SCR/n-k-1$
المجموع	$SCT=\sum_{t=1}^{n}(y_t-\bar{y})^2$	$n-1$	

5. الاختبارات الإحصائية، توزيع المعاينة وتحديد مجالات المعالم:

1.8. تحديد التوزيع الاحتمالي للمقدرات:

بداية لدينا كما هو معلوم أخطاء التقدير تتبع التوزيع الطبيعي على النحو التالي:

$$\varepsilon_t \rightarrow N(0,\delta_\varepsilon^2) \rightarrow \frac{1}{\delta_\varepsilon^2}\sum_{t=1}^{n}e_t^2 \rightarrow \chi_{n-k-1}^2$$

منه نستنتج أن تباين الأخطاء يتبع توزيع كاي تربيع ب $n-k-1$ درجات حرية على النحو التالي:

$$\hat{\delta}_\varepsilon^2=\frac{\sum_{t=1}^{n}e_t^2}{n-k-1} \rightarrow (\mathrm{n-k-1})\frac{\hat{\delta}_\varepsilon^2}{\delta_\varepsilon^2} \rightarrow \chi_{n-k-1}^2$$

حيث يكون قانون التوزيع t (Student) كالتالي:

$$t=\frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi_{n-k-1}^2/(n-k-1)}}=\frac{\dfrac{\hat{a}_i-a_i}{\delta_\varepsilon\sqrt{a_{jj}}}}{\sqrt{\dfrac{(n-k-1)\hat{\delta}_\varepsilon^2}{\delta_\varepsilon^2}/(n-k-1)}}$$

منه تصبح إحصائية ستيودنت المحسوبة عند $n-k-1$ درجات حرية تحدد وفق العلاقة التالية:

$$t = \frac{\hat{a}_i - a_i}{\delta_\varepsilon \sqrt{a_{jj}}} = \frac{\hat{a}_i - a_i}{\delta_{\hat{a}_i}} \sim t_{n-k-1}$$

أين تمثل a_{jj} عناصر قطر المصفوفة $(X'X)^{-1}$.

2.8. اختبار الفرضيات:

على غرار حالة نموذج الانحدار الخطي البسيط لابد في إطار نموذج الانحدار الخطي المتعدد المرور على اختبار الفرضيات لاختبار معنوية المعلمات المقدرة، حيث يمكننا تمييز ستة حالات مختلفة لاختبار الفرضيات على النحو التالي:

الحالة الأولى: حالة اختبار معنوية المعلمة وهل تختلف معنويا عن الصفر:

تعتبر أشهر الحالات وأكثرها أهمية حيث تسمح لنا باختبار معنوية المعلمة المقدرة وهل هي تساوي الصفر معنويا أم تختلف عنه، بالتالي تسمح لنا بمعرفة هل المتغير قيد الاختبار يؤثر على المتغير التابع أم لا، وتكتب الفرضيتان على النحو التالي:

$$\begin{cases} H_0: a_i = 0 \\ H_1: a_i \neq 0 \end{cases}$$

ولغرض اختبار الفرضتين، نقوم بتعويض الفرضية العدمية في إحصائية ستيودنت المحسوبة أعلاه نظرا لسهولة اختبارها مقارنة بالفرضية البديلة، وذلك على النحو التالي:

$$t = \frac{|\hat{a}_i - a_i|}{\delta_{\hat{a}_i}} = \frac{|\hat{a}_i|}{\delta_{\hat{a}_i}}$$

حيث يتم قبول الفرضية العدمية إذا كانت $\frac{|\hat{a}_i|}{\delta_{\hat{a}_i}} \leq t_{n-k-1}^{0.05}$ مما يعني أن المعلمة ليس لها دلالة إحصائية ولا تختلف معنويا عن الصفر عند درجة معنوية $\alpha\%$، في حين لو كانت $\frac{|\hat{a}_i|}{\delta_{\hat{a}_i}} > t_{n-k-1}$ نرفض الفرضية العدمية ونقبل الفرضية البديلة ونقول أن المعلمة المقدرة لها دلالة إحصائية وتختلف معنويا عن الصفر عند درجة معنوية $\alpha\%$ مما يعني أن المتغير المستقل قيد الدراسة يفسر معنويا المتغير التابع.

الحالة الثانية: حالة اختبار مساواة معلمة لقيمة محددة:

في هذه الحالة تكتب الفرضيات على النحو التالي حيث v عدد حقيقي معلوم:

$$\begin{cases} H_0: a_i = v \\ H_1: a_i \neq v \end{cases}$$

حيث في هذه الحالة من خلال اختبار الفرضية العدمية نتحصل على إحصائية ستيودنت محسوبة كالتالي:

$$t = \frac{|\hat{a}_i - v|}{\delta_{\hat{a}_i}} \rightarrow t_{n-k-1}$$

وتتم المقارنة بنفس طريقة الحالة الأولى حيث إذا كانت $\frac{|\hat{a}_i - v|}{\delta_{\hat{a}_i}} \leq t_{n-k-1}^{0.05}$ نقبل الفرضية العدمية مما يعني أن المعلمة المقدرة لا تختلف معنويا عن v عند مستوى احتمال $\alpha\%$، أما إذا كانت $\frac{|\hat{a}_i - v|}{\delta_{\hat{a}_i}} > t_{n-k-1}$ نرفض الفرضية العدمية ونقبل البديلة ونقول أن المعلمة المقدرة تختلف معنويا عن v عند مستوى احتمال $\alpha\%$.

الحالة الثالثة: حالة اختبار معلمة أصغر من حد معين:

في هذه الحالة لا يتم التعامل مع المساواة مقارنة بالحد المعلوم بل يتم التعامل على أساس أصغر من حد معلوم ما يعني وجود مجال واحد فقط للرفض وهو المجال الأصغر أي يسار القيمة v وتكتب الفرضيات على النحو التالي:

$$\begin{cases} H_0: a_i = v \\ H_1: a_i \leq v \end{cases}$$

في هذه الحالة يتم حساب إحصائية ستيودنت بنفس الطريقة السابقة، لكن الفرق الوحيد يكمن في إحصائية ستيودنت الجدولية حيث يتم مضاعفة مستوى الاحتمال إلى $2\alpha\%$ لأن الاختبار في هذه الحالة أحادي الاتجاه Unilatéral وليس ثنائي الاتجاه على غرار الحالات السابقة Bilatéral، على سبيل المثال إذا كان مستوى الاحتمال المأخوذ في الاعتبار هو 5% فإن إحصائية ستيونت المقارن معها هي $t_{n-k-1}^{0.1}$ وليس $t_{n-k-1}^{0.05}$ على غرار الحالات السابقة، حيث إذا كانت $\frac{|\hat{a}_i - v|}{\delta_{\hat{a}_i}} \leq t_{n-k-1}^{0.1}$ نقبل الفرضية العدمية ونقول أن المعلمة لا تختلف معنويا عن v عند مستوى احتمال $\alpha\%$ وليس $2\alpha\%$، في حين ما إذا كانت $\frac{|\hat{a}_i - v|}{\delta_{\hat{a}_i}} > t_{n-k-1}^{0.1}$ نرفض الفرضية العدمية ونقبل الفرضية البديلة ونقول أن المعلمة أصغر معنويا من القيمة v عند مستوى احتمال $\alpha\%$.

الحالة الرابعة: حالة اختبار معلمة أكبر من حد معين:

هذه الحالة تشبه إلى حد بعيد الحالة الثالثة وذلك على النحو التالي:

$$\begin{cases} H_0: a_i = v \\ H_1: a_i \geq v \end{cases}$$

حيث يتم حساب إحصائية ستيودنت بنفس الطريقة، لكن إذا كانت $\frac{|\hat{a}_i - v|}{\delta_{\hat{a}_i}} \leq -t_{n-k-1}^{0.1}$ نقبل الفرضية العدمية ونقول أن المعلمة المقدرة لا تختلف معنويا عن v عند مستوى احتمال $\alpha\%$، في حين إذا كانت $\frac{|\hat{a}_i - v|}{\delta_{\hat{a}_i}} > -t_{n-k-1}^{0.1}$ نرفض الفرضية العدمية ونقبل البديلة ونقول أن المعلمة المقدرة أكبر معنويا من v عند مستوى احتمال $\alpha\%$.

الحالة الخامسة: حالة اختبار أكثر من معلمة:

في هذه لا يتم اختبار كل معلمة على حدا، إنما يتم اختبار معلمتين على الأقل هل تساويان قيمة محددة وذلك على النحو التالي من خلال الفرضيات التالية:

$$\begin{cases} H_0: a_i + a_j = v \\ H_1: a_i + a_j \neq v \end{cases} \quad i \neq j$$

باختبار الفرضية العدمية تكون إحصائية ستيودنت المحسوبة كالتالي:

$$t = \frac{\left|\hat{a}_i + \hat{a}_j - v\right|}{\hat{\delta}_{\hat{a}_i + \hat{a}_j}} \rightarrow t_{n-k-1}$$

حيث يتم حساب المقام $\delta_{\hat{a}_i + \hat{a}_j}$ وفق العلاقة التالية:

$$\hat{\delta}_{\hat{a}_i + \hat{a}_j} = \sqrt{\delta^2_{\hat{a}_i} + \delta^2_{\hat{a}_j} + 2Cov(\hat{a}_i, \hat{a}_j)}$$

منه إذا كانت $\frac{\left|\hat{a}_i + \hat{a}_j - v\right|}{\hat{\delta}_{\hat{a}_i + \hat{a}_j}} \leq t^{0.05}_{n-k-1}$ نقبل الفرضية العدمية ونقول أن مجموع المعلمتين المقدرتين لا يختلف معنويا عن v عند مستوى احتمال $\alpha\%$، أما أذا كانت $\frac{\left|\hat{a}_i + \hat{a}_j - v\right|}{\hat{\delta}_{\hat{a}_i + \hat{a}_j}} > t^{0.05}_{n-k-1}$ نرفض الفرضية العدمية ونقبل الفرضية البديلة ونقول أن مجموع المعلمتين يختلف معنويا عن القيمة v عند مستوى احتمال $\alpha\%$.

الحالة السادسة: حالة اختبار عدة معلمات في آن واحد:

في هذه الحالة يتم اختبار مساواة العديد من المعلمات في نفس الوقت لمعلمة محددة v، وتكون الفرضيات كالتالي:

$$\begin{cases} H_0: a_q = v \\ H_1: a_q \neq v \end{cases}$$

حيث تمثل q عدد المعلمات قيد الاختبار أو بعد المعلمات.

في هذه الحالة لدينا الإحصائية $\frac{1}{k+1}(\hat{a} - a)'\hat{\Omega}^{-1}_{\hat{a}}(\hat{a} - a)$ تتبع توزيع فيشر عند $k + 1$ و$n - k - 1$ درجات حرية حيث k عدد المتغيرات المفسرة، منه يكون لدينا الإحصائية $\frac{1}{q}(\hat{a}_q - a_q)'\hat{\Omega}^{-1}_{\hat{a}}(\hat{a}_q - a_q)$ التي بدورها تتبع توزيع فيشر ب q و$n - k - 1$ درجات حرية، حيث لقبول الفرضية العدمية يجب أن تتحقق العلاقة:

$$\frac{1}{q}(\hat{a}_q - a_q)'\hat{\Omega}^{-1}_{\hat{a}}(\hat{a}_q - a_q) \leq F^{\alpha}_{q,n-k-1}$$

حيث تمثل $F^{\alpha}_{q,n-k-1}$ إحصائية فيشر الجدولية عند مستوى احتمال $\alpha\%$ و q، $n-k-1$ درجات حرية.

3.8. تحديد مجال الثقة للمعالم:

لتحديد مجال الثقة للمعالم لدينا دالة كثافة الاحتمال التالية:

$$Pr\left[-t^{\frac{\alpha}{2}}_{n-k-1} \le \frac{\hat{a}_i - a_i}{\delta_{\hat{a}_i}} \le t^{\alpha/2}_{n-k-1}\right] = 1-\alpha$$

وبتبسيط المتراجحة نجد:

$$-t^{\frac{\alpha}{2}}_{n-k-1} \le \frac{\hat{a}_i - a_i}{\delta_{\hat{a}_i}} \le t^{\frac{\alpha}{2}}_{n-k-1} \rightarrow \hat{a}_i - \delta_{\hat{a}_i}\left(t^{\frac{\alpha}{2}}_{n-k-1}\right) \le a_i \le \hat{a}_i + \delta_{\hat{a}_i}(t^{\frac{\alpha}{2}}_{n-k-1})$$

بالتالي يكون مجال الثقة:

$$a_i \in \left[\hat{a}_i \pm \delta_{\hat{a}_i}(t^{\frac{\alpha}{2}}_{n-k-1})\right] \quad \forall i = 0,1,\dots,k$$

4.8. تحديد مجال الثقة لتباين الأخطاء:

كما أشرنا سابقا فإن الأخطاء تتبع التوزيع الطبيعي من خلال العلاقة:

$$\varepsilon_t \rightarrow N(0,\delta^2_{\varepsilon}) \rightarrow \frac{1}{\delta^2_{\varepsilon}}\sum_{t=1}^{n} e^2_t \rightarrow \chi^2_{n-k-1}$$

ولدينا أيضا:

$$\sum_{t=1}^{n} e^2_t = \hat{\delta}^2_{\varepsilon}(n-k-1) \rightarrow \hat{\delta}^2_{\varepsilon} = \frac{1}{n-k-1}\sum_{t=1}^{n} e^2_t$$

هذا ما يستلزم أن تكون العلاقة التالية تتبع توزيع كاي تربيع ب $n-k-1$ درجات حرية:

$$\hat{\delta}^2_{\varepsilon} = \frac{1}{n-k-1}\sum_{t=1}^{n} e^2_t \leftrightarrow \frac{(n-k-1)\hat{\delta}^2_{\varepsilon}}{\delta^2_{\varepsilon}} \rightarrow \chi^2_{n-k-1}$$

حيث من خلال هذه العلاقة وتوزيع كاي تربيع يمكننا تحديد دالة الكثافة الاحتمالية كالتالي:

$$Pr\left[\chi^2_{n-k-1,\frac{\alpha}{2}} \le \frac{(n-k-1)\hat{\delta}^2_{\varepsilon}}{\delta^2_{\varepsilon}} \le \chi^2_{n-k-1,1-(\frac{\alpha}{2})}\right] = 1-\alpha$$

ومن خلال تبسيط المتراجحة نتحصل على:

$$\delta_{\varepsilon}^{2} \in \left[\frac{(n-k-1)\hat{\delta}_{\varepsilon}^{2}}{\chi_{n-k-1,\frac{\alpha}{2}}^{2}}, \frac{(n-k-1)\hat{\delta}_{\varepsilon}^{2}}{\chi_{n-k-1,1-(\frac{\alpha}{2})}^{2}}\right]$$

حيث تمثل $\chi_{n-k-1,\frac{\alpha}{2}}^{2}$ قيمة كاي تربيع ب $n-k-1$ درجات حرية عند $\frac{\alpha}{2}$ درجة معنوية، في حين تمثل الإحصائية $\chi_{n-k-1,1-(\frac{\alpha}{2})}^{2}$ قيمة كاي تربيع ب $n-k-1$ درجات حرية عند $1-(\frac{\alpha}{2})$ درجة معنوية، وبما أن توزيع كاي تربيع غير متناظر فلابد من قراءة كلا الإحصائيتين على حدا وعدم طرح الأولى من 1 أو العكس.

6. اختبار المعنوية الكلية للنموذج المقدر:

كما في حالة نموذج الانحدار الخطي البسيط، يمكن اختبار جودة النموذج المقدر ككل ضمن نموذج الانحدار الخطي المتعدد باستعمال جدول تحليل التباين، وذلك بمقارنة أو استخدام نسبة التباين المفسر إلى التباين غير المفسر، حيث يعتمد هذا الاختبار على توزيع فيشر بدرجات حرية k و$n-k-1$ ، وتحسب إحصائية فيشر المحسوبة على النحو التالي:

$$F^{*} = \frac{SCE/k}{SCR/(n-k-1)} = \frac{\sum_{t=1}^{n}(\hat{y}_t-\bar{y})^2/k}{\sum_{t=1}^{n}e_t^2/(n-k-1)} = \frac{R^2/k}{(1-R^2)/(n-k-1)}$$

ذلك لاختبار الفرضيتين التاليتين:

$$\begin{cases} H_0: a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0 \\ H_1: a_1 \neq a_2 \neq \cdots \neq a_k \neq 0 \end{cases}$$

أين تعني الفرضية البديلة أنه يوجد على الأقل معلمة واحدة تختلف معنويا عن الصفر، في حين تعني الفرضية العدمية أن كل المعلمات لا تختلف معنويا عن الصفر، فإذا كانت إحصائية فيشر المحسوبة أصغر أو تساوي فيشر الجدولية عند مستوى احتمال $\alpha\%$ حيث $F^{*} \leq F_{k,n-k-1}^{\alpha}$ نقبل الفرضية العدمية ونقول أن النموذج المقدر ككل غير معنوي، أما في حالة العكس $F^{*} > F_{k,n-k-1}^{\alpha}$ فنرفض الفرضية العدمية ونقبل الفرضية البديلة ونقول أن النموذج ككل معنوي عند مستوى احتمال $\alpha\%$ مما يعني وجود على الأقل معلمة واحدة معنوية وتختلف عن الصفر، كما أن قبول الفرضية البديلة في هذه الحالة يعني أيضا أن معامل التحديد معنوي ويختلف معنويا عن الصفر.

7. اختبارات أخرى اعتمادا على إحصائية فيشر:

1- اختبار إضافة متغيرات أخرى:

على سبيل المثال نريد دراسة إضافة متغيرين إضافيين لنموذج بمتغير مستقل واحد، ونختبر هل إضافة هذين المتغيرين تضيف أو تعزز القدرة التفسيرية للنموذج قيد الدراسة، حيث لدينا ثلاثة مراحل لإجراء الاختبار على النحو التالي:

المرحلة الأولى: تتمثل في تقدير النموذج الكلي بثلاثة متغيرات واستخراج جدول تحليل التباين للنموذج المقدر.

المرحلة الثانية: تتمثل في تقدير النموذج ذو المتغير الواحد قبل إضافة المتغيرات الأخرى واستخراج جدول تحليل التباين للنموذج المقدر.

المرحلة الثالثة: نقوم باختبار الفرضيتين التاليتين:

$$\begin{cases} H_0: a_2 = a_3 = \cdots = \ a_k = 0 \\ H_1: a_2 \neq a_2 \neq \cdots \neq \ a_k \neq 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن الفرضيتين تتعلقان بالمعالم دون المعلمة a_1 التي تعتبر أساسية في النموذج، والاختبار يعمد إلى دارسة هل إضافة هذه المعلمات (المتغيرات المستقلة المتعلقة به) سيزيد من القدرة التفسيرية للنموذج أم لا.

ثم نقوم بحساب إحصائية فيشر المحسوبة على طريقتين على النحو التالي:

$$F^* = \frac{(SCE - SCE^1)/(k - k')}{SCR/(n - k - 1)}$$

$$F^* = \frac{(SCR^1 - SCR)/(k - k')}{SCR/(n - k - 1)}$$

حيث تمثل SCR وSCE مجموع مربعات البواقي ومجموع مربعات الانحرافات المفسرة للنموذج الكلي الذي يحتوي على كل المعالم، أماSCR^1 وSCE^1 مجموع مربعات البواقي ومجموع مربعات الانحرافات المفسرة للنموذج بدون إضافة المتغيرات الإضافية، k يمثل عدد المتغيرات المفسرة في النموذج الكلي في حين k' عدد المتغيرات المفسرة في النموذج بدون إضافة المتغيرات الإضافية وطبعا n عدد المشاهدات.

حيث إذا كانت $F^* \leq F^{\alpha}_{k-k',n-k-1}$ نقبل الفرضية العدمية ونقول أن إضافة متغيرات إضافية للنموذج لا يزيد من قدرته التفسيرية عند مستوى احتمال $\alpha\%$، أما في حالة العكس $F^* > F^{\alpha}_{k-k',n-k-1}$ نرفض الفرضية العدمية ونقول أن إضافة متغيرات إضافية للنموذج يحسن من قدرته التفسيرية عند مستوى احتمال $\alpha\%$.

2– اختبار Chow:

يهتم هذا الاختبار بدراسة ثبات معلمات النموذج في كامل الفترة الزمنية، بعبارة أخرى هل معلمات النموذج على طول الفترة تختلف عن معلمات النماذج المقدرة وفق الفترات البينية ضمن الفترة الكلية، ويتم هذا الاختبار وفق ثلاثة مراحل كالتالي:

المرحلة الأولى: تقدير النموذج الأساسي على طول الفترة t واستخراج جدول تحليل التباين للنموذج المقدر.

المرحلة الثانية: تقدير النماذج الفرعية على طول الفترات البينية، مثلا فترتين ضمنيتين من 0 إلى t/2 ثم من t/2 إلى t، مع استخراج جداول تحليل التباين لكل نموذج مقدر.

المرحلة الثالثة: اختبار الفرضية التالية:

$$H_0 : \begin{pmatrix} a_1 = a_1^1 = a_1^2 \\ a_2 = a_2^1 = a_2^2 \\ \vdots \\ a_0 = a_0^1 = a_0^2 \\ a_k = a_k^1 = a_k^2 \end{pmatrix}$$

ومنه نقوم بحساب إحصائية فيشر المحسوبة وفق العلاقة التالية:

$$F^* = \frac{[(SCR - (SCR^1 + SCR^2)]/ddl_n}{(SCR^1 + SCR^2)/ddl_d}$$

حيث يمثل SCR مجموع مربعات البواقي للنموذج الكلي على كامل الفترة، SCR^1 وSCR^2 مجموع مربعات البواقي للنموذجين الضمنيين على الفترات البينية، أما ddl_n وddl_d عدد درجات الحرية التي تحسب كالتالي:

$$ddl_n = (n - k - 1) - [(n_1 - k - 1) + (n_2 - k - 1)]$$

$$ddl_d = (n_1 - k - 1) + (n_2 - k - 1)$$

فإذا كانت $F^* \leq F^{\alpha}_{k+1,n-2(k+1)}$ نقبل الفرضية العدمية ونقول أن المعلمات ثابتة عبر الزمن عند مستوى احتمال $\alpha\%$، أما في حالة العكس $F^* > F^{\alpha}_{k+1,n-2(k+1)}$ نرفض الفرضية العدمية ونقول أن المعلمات غير ثابتة على طول الفترة حيث أنها تتغير عبر الفترات الضمنية عند مستوى احتمال $\alpha\%$.

8. التنبؤ ضمن نموذج الانحدار الخطي المتعدد:

نظرا لأن المتغيرات المستقلة معلومة فإن في حالة توفر معلوماتها عند المشاهدة t+h يمكننا التنبؤ بالقيم المستقبلية للمتغير التابع عند نفس اللحظة y_{t+h} على النحو التالي:

$$y_{t+h} = a_0 + a_1 x_{1t+h} + a_2 x_{2t+h} + \cdots + a_k x_{kt+h} + \varepsilon_{t+h} \; ; h = 1,2, \ldots, H$$

$$\hat{y}_{t+h} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_{1t+h} + \hat{a}_2 x_{2t+h} + \cdots + \hat{a}_k x_{kt+h} \; ; h = 1,2, \ldots, H$$

أما فيما يخص مجال الثقة للقيمة المتنبئ بها تكون على النحو التالي انطلاقا من دالة كثافة الاحتمال التالية:

$$Pr\left[-t^{\alpha/2}_{n-k-1} \leq \frac{Y_{t+h} - \hat{Y}_{t+h}}{\hat{\delta}_{\varepsilon}\sqrt{1 + X'_{t+h}(X'X)^{-1}X_{t+h}}} \leq t^{\alpha/2}_{n-k-1}\right] = 1 - \alpha$$

من خلال تبسيط المتراجحة نتحصل على مجال الثقة عند $\alpha\%$:

$$Y_{t+h} \in \hat{Y}_{t+h} \pm t^{\alpha/2}_{n-k-1} . \hat{\delta}_{\varepsilon} \sqrt{1 + X'_{t+h}(X'X)^{-1}X_{t+h}}$$

تمارين محلولة:

التمرين الأول:

ليكن لدينا النموذج الموالي ذو متغير تابع y_i والمتغيرات المستقلة x_{1i} و x_{2i} لخمسة أفراد (لغرض تبسيط الحسابات) على النحو التالي:

i	y_i	x_{1i}	x_{2i}
1	8	3	5
2	1	1	4
3	8	5	6
4	3	2	4
5	5	4	6

المطلوب:

1. أكتب النموذج بشكل مصفوفي.
2. قدر معالم النموذج مع كتابة معادلة الانحدار الخطي المتعدد المقدرة.
3. حول المعطيات إلى مشاهدات ممركزة ثم أعد عملية التقدير.
4. أحسب التباينات والانحراف المقدرة للمعلمات الثلاثة.

الحل:

1. كتابة الشكل المصفوفي للنموذج:

لدينا عدد المتغيرات المستقلة هو $k = 2$ إضافة إلى الحد الثابت $k + 1 = 3$ مع $n = 5$ كعدد للمشاهدات، منه تكون معادلة الانحدار الخطي المتعدد على النحو التالي:

$$y_i = a_0 + a_1 x_{1i} + a_2 x_{2i} + \varepsilon_i \; \ldots . \; i = 1,2, \ldots, 5$$

منه يكون الشكل المصفوفي على النحو التالي:

$$\underset{(5,1)}{\overset{Y}{\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 8 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}}} = \underset{(5,3)}{\overset{X}{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}}} \underset{(3,1)}{\overset{a}{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}} + \underset{(5,1)}{\overset{\varepsilon}{\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{pmatrix}}}$$

2. تقدير المعالم:

لدينا:

$$\hat{a} = (X'X)^{-1}X'Y$$

حيث تساوي كلا المصفوفتين ما يلي:

$$(X'X) = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 & \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{2i} & \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{2i} & \sum_{i=1}^{n} x_{2i}^2 \end{pmatrix};\ X'Y = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{1i}y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{2i}y_i \end{pmatrix}$$

نقوم بحساب كل عناصر المصفوفة من خلال الجدول الموالي:

i	y_i	x_{1i}	x_{2i}	x_{1i}^2	x_{2i}^2	$x_{1i}x_{2i}$	$x_{1i}y_i$	$x_{2i}y_i$
1	8	3	5	9	25	15	24	40
2	1	1	4	1	16	4	1	4
3	8	5	6	25	36	30	40	48
4	3	2	4	4	16	8	6	12
5	5	4	6	16	36	24	20	30
$\sum$	25	15	25	55	129	81	91	134

بالتالي يكون لدينا المصفوفتين التاليتين:

$$(X'X) = \begin{pmatrix} 5 & 15 & 25 \\ 15 & 55 & 81 \\ 25 & 81 & 129 \end{pmatrix};\ X'Y = \begin{pmatrix} 25 \\ 91 \\ 134 \end{pmatrix}$$

كمرحلة موالية نقوم بحساب وتحديد معكوس المصفوفة $(X'X)$، حيث بداية لابد من حساب المحدد لها:

$$det(X'X) = 5\begin{vmatrix} 55 & 81 \\ 81 & 129 \end{vmatrix} - 15\begin{vmatrix} 15 & 81 \\ 25 & 129 \end{vmatrix} + \ 15\begin{vmatrix} 15 & 55 \\ 25 & 81 \end{vmatrix}$$

$$det(X'X) = 5(534) - 15(-90) + 25(-160) = 20$$

المرحلة الموالية في حسب المحدد هي استخراج مرافق المصفوفة كالتالي:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} detM_{ij}$$

حيث تمثل i قيمة السطر، j قيمة العمود، A_{ij} قيمة عنصر المصفوفة في السطر i والعمود j في حين M_{ij} المصفوفة المتبقية حين حذف السطر والعمود الذين يتعلقان بالقيمة المراد حسابها، وذلك كالتالي:

نقوم مثلا بحساب القيمة A_{11} أي نقطة التقاء السطر الأول مع العمود الأول:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 55 & 81 \\ 81 & 129 \end{vmatrix} = 534$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 15 & 81 \\ 25 & 129 \end{vmatrix} = 90$$

ومع القيام بنفس الشيء لكل عناصر المصفوفة نتحصل على مرافق المصفوفة كالتالي:

$$Co(X'X) = \begin{pmatrix} 534 & 90 & -160 \\ 90 & 20 & -30 \\ -160 & -30 & 50 \end{pmatrix}$$

ومع إيجاد المرافق يمكننا الآن تحديد المعكوس $(X'X)^{-1}$ حيث تساوي:

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{det(X'X)}\,Co(X'X)$$

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 534 & 90 & -160 \\ 90 & 20 & -30 \\ -160 & -30 & 50 \end{pmatrix}$$

أما المرحلة الأخيرة فهي حساب المعلمات كالتالي:

$$\hat{a} = (X'X)^{-1}X'Y = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 534 & 90 & -160 \\ 90 & 20 & -30 \\ -160 & -30 & 50 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 25 \\ 91 \\ 134 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2.5 \\ -1.5 \end{pmatrix}$$

ومنه يمكن كتابة معادلة الانحدار الخطي المتعدد المقدرة قيد الدراسة كالتالي:

$$y_i = 5 + 2.5x_{1i} - 1.5x_{2i} + e_i \dots .\, i = 1,2,\dots,5$$

أو:

$$\hat{y}_i = 5 + 2.5x_{1i} - 1.5x_{2i} \dots .\, i = 1,2,\dots,5$$

3. التقدير بالبيانات الممركزة:

نقوم أولا بحساب $\hat{a}_1$ و$\hat{a}_2$ من خلال العلاقة التالية:

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V(x_{1i}) & Cov(x_{1i}, x_{2i}) \\ Cov(x_{2i}, x_{1i}) & V(x_{2i}) \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} Cov(x_{1i}, y_i) \\ Cov(x_{2i}, y_i) \end{pmatrix}$$

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\bar{x}_1)^2 & \sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\bar{x}_1)(x_{2i}-\bar{x}_2 \\ \sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\bar{x}_1)(x_{2i}-\bar{x}_2 & \sum_{i=1}^{n}(x_{2i}-\bar{x}_2)^2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\bar{x}_1)(y_i-\bar{y}) \\ \sum_{i=1}^{n}(x_{2i}-\bar{x}_2)(y_i-\bar{y}) \end{pmatrix}$$

والجدول التالي يحتوي على كل البيانات التي نحتاجها في تطبيق العلاقة أعلاه:

i	$x_{1i}-\bar{x}_1$	$x_{2i}-\bar{x}_2$	$(x_{1i}-\bar{x}_1)^2$	$(x_{1i}-\bar{x}_1)^2$	$(x_{1i}-\bar{x}_1)(x_{2i}-\bar{x}_2)$	$y_i-\bar{y}$
1	0	0	0	0	0	3
2	-2	-1	4	1	2	-4
3	2	1	4	1	2	3
4	-1	1	1	1	1	-2
5	1	1	1	1	1	0
$\sum$	0	0	10	4	6	0

i	$(x_{1i}-\bar{x}_1)(y_i-\bar{y})$	$(x_{2i}-\bar{x}_2)(y_i-\bar{y})$
1	0	0
2	8	4
3	6	3
4	2	2
5	0	0
$\sum$	16	9

حيث لدينا $\bar{x}_1=3$، $\bar{x}_2=5$, $\bar{y}=5$.

ومنه يكون لدينا:

$$\hat{a}=\begin{pmatrix}\hat{a}_1\\ \hat{a}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 6\\ 6 & 4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}16\\ 9\end{pmatrix}$$

حيث لدينا:

$$(X'X)=\begin{pmatrix}10 & 6\\ 6 & 4\end{pmatrix}\to det(X'X)=(10.4)(6.6)=4$$

أما المرافق فهو:

$$Co(X'X)=\begin{pmatrix}4 & -6\\ -6 & 10\end{pmatrix}$$

بالتالي يكون المعكوس:

$$(X'X)^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & -6\\ -6 & 10\end{pmatrix}$$

وتكون المعلمات:

$$\hat{a}=\begin{pmatrix}\hat{a}_1\\ \hat{a}_2\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & -6\\ -6 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}16\\ 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.5\\ -1.5\end{pmatrix}$$

أما الحد الثابت فيحسب كالتالي:

$$\hat{a}_0 = \bar{y} - \hat{a}_1\bar{x}_1 - \hat{a}_2\bar{x}_2 = 5 - (2.5 * 3) - (-1.5 * 5) = 5$$

ويكون شعاع المقدرات:

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2.5 \\ -1.5 \end{pmatrix}$$

4. حساب التباينات والانحرافات المقدرة للمعالم:

نعتمد من خلال هذه المرحلة على العلاقة: $\Omega_{\hat{a}} = \delta_\varepsilon^2 (X'X)^{-1}$ إضافة إلى $\hat{\delta}_\varepsilon^2 = \frac{e'e}{n-k-1} = \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{n-k-1}$

ونستخرج البيانات من الجدول التالي:

i	y_i	$\hat{y}_i$	e_i	e_i^2
1	8	5	3	9
2	1	1.5	-0.5	0.25
3	8	8.5	-0.5	0.25
4	3	4	-1	1
5	5	6	-1	1
$\sum$				11.5

حيث نقوم بحساب التباين المقدر على النحو التالي:

$$\hat{\delta}_\varepsilon^2 = \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{n-k-1} = \frac{11.5}{5-2-1} = 5.75$$

فتكون مصفوفة التباينات والتباينات المشتركة كالتالي:

$$\Omega_{\hat{a}} = \delta_\varepsilon^2 (X'X)^{-1} = 5.75 \begin{pmatrix} 534/20 & 90/20 & -160/20 \\ 90/20 & 1 & -30/20 \\ -160/20 & -30/20 & 50/20 \end{pmatrix}$$

حيث يتمثل التباين المقدر للمعلمات في جداء ضرب التباين المقدر للأخطاء في قطر المصفوفة $(X'X)^{-1}$ كالتالي:

$$\hat{\delta}_{\hat{a}_0}^2 = 5.75 * \frac{534}{20} = 153.525 \rightarrow \hat{\delta}_{\hat{a}_0} = 12.39$$

$$\hat{\delta}_{\hat{a}_1}^2 = 5.75 * 1 = 5.75 \rightarrow \hat{\delta}_{\hat{a}_0} = 2.39$$

$$\hat{\delta}_{\hat{a}_2}^2 = 5.75 * \frac{50}{20} = 13.92 \rightarrow \hat{\delta}_{\hat{a}_0} = 3.73$$