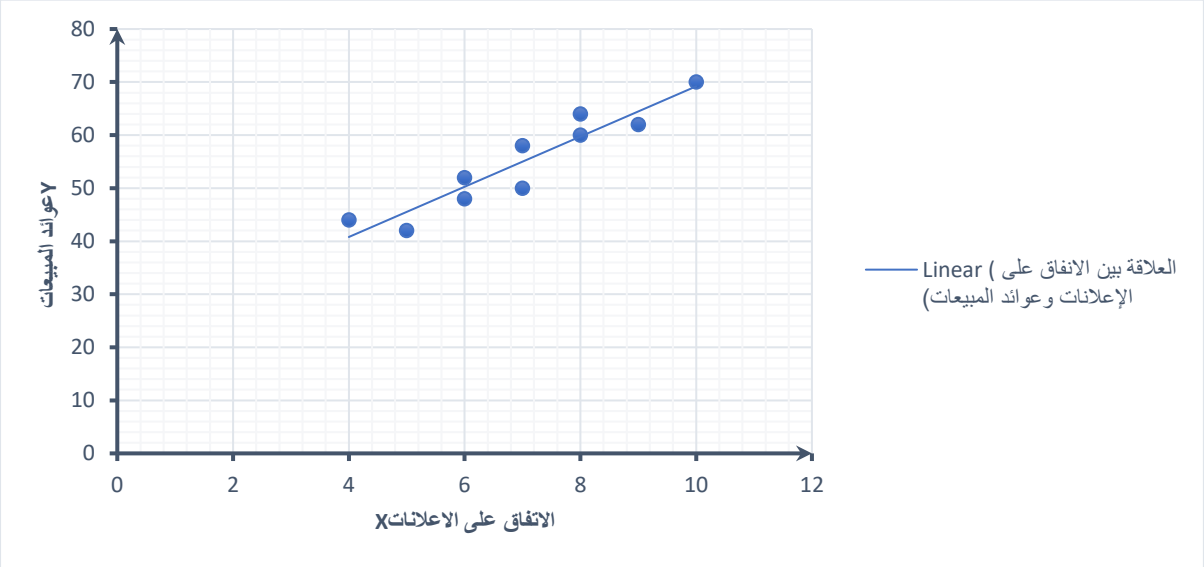
الإجابة النموذجية للسلسة الأولى حول الانحدار الخطي البسيط

التمرين الأول:

1. التمثيل البياني لبيانات الجدول التالي بسحابة النقاط:

السنة	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
الإعلانات	4	5	6	6	7	8	7	9	8	10
المبيعات	44	42	52	48	50	60	588	62	64	70



- **تفسير البيانات:**

من خلال سحابة النقاط نلاحظ أن العلاقة بين الإنفاق على الإعلانات وعوائد مبيعات الشركة هي علاقة خطية أي أنه يمكننا التعبير عنها بخط انحدار يمر بين مختلف الثنائيات المشكلة من قيم الإعلانات وقيم عوائد المبيعات.

ومن جهة أخرى نجد أن هذه العلاقة طردية بحكم أن زيادة الإنفاق على الإعلانات تؤدي إلى زيادة عوائد أرباح هذه الشركة وسنتأكد من خلال إشارة معامل الانحدار الذي سنقوم بحسابه لاحقا.

2. تقدير النموذج الخطي البسيط الذي يقيس أثر الانفاق على الإعلانات وعوائد المبيعات وتفسير النتائج:

*تقدير النموذج الخطي البسيط الذي يقيس أثر الانفاق على الإعلانات وعوائد المبيعات.

- **تقدير المعلمة $\hat{\beta}$:**

Annee	X	Y	$(X-\bar{X})$	$(Y-\bar{Y})$	$(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})$	$(X-\bar{X})^2$	$\hat{Y}$	Er
2009	4	44	-3	-11	33	9	40.80	3.20
2010	5	42	-2	-13	26	4	45.53	-3.53
2011	6	52	-1	-3	3	1	50.27	1.73
2012	6	48	-1	-7	7	1	50.27	-2.27
2013	7	50	0	-5	0	0	55.00	-5.00
2014	8	60	1	5	5	1	59.73	0.27
2015	7	58	0	3	0	0	55.00	3.00

2016	9	62	2	7	14	4	64.47	-2.47
2017	8	64	1	9	9	1	59.73	4.27
2018	10	70	3	15	45	9	69.20	0.80
∑	**70**	**550**	**0**	**0**	**142**	**30**	**550.00**	**0.00**

$\hat{\beta} = \frac{\sum(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})}{\sum(X-\bar{X})2}$ $\hat{\beta} = \frac{142}{30}$ $\hat{\beta} = 4.73$

- **تقدير المعلمة α**

$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X}$ $\hat{\alpha}=55-4.73(7)$ $\hat{\alpha}=21.86$

- **النموذج المقدر:**

$\hat{Y}_t=21.86+4.73X_t$

***مثال تقدير عوائد المبيعات لسنة 2009**

$\hat{Y}_1=21.86+4.73(4)$ $\hat{Y}_1=40.80$

***تفسير المعلمات:**

- تشير المعلمة $\hat{\alpha}$ = **21.86** إلى وجود مقدار ثابت من عوائد المبيعات بمبلغ 21,86 **مليون دينار جزائري** لا يتأثر بتغير الانفاق على الإعلانات (المتغير المستقل),أي أنه عندما يساوي الانفاق على الإعلان الصفر تحقق الشركة عائدا بمقدار21,86مليون دينار جزائري.
- تشير المعلمة $\hat{\beta}$= **4.73+** إلى وجود علاقة طردية بين الإنفاق على الإعلانات وعوائد الإنتاج من جهة وأن كل تغير في الإنفاق على الاعلانات(x) بوحدة واحدة يؤدي إلى تغير عوائد المبيعات في نفس الاتجاه ب**4.73 وحدة.**

استنتاج مجموع مربعات البواقي $\sum e_t^2$

e_t^2	$(Y-\bar{Y})^2$	$(\hat{Y}-\bar{Y})$	$(\hat{Y}-\bar{Y})^2$
10.24	121	-14.2	201.64
12.46	169	-9.47	89.68
2.99	9	-4.73	22.37
5.15	49	-4.73	22.37
25	25	0	0
0.07	25	4.73	22.37
9	9	0	0
6.1	49	9.47	89.68
18.23	81	4.73	22.37
0.64	225	14.2	201.64
89.88	**762**	**0**	**672.12**

$\sum e_t^2=89.88$

3. تقدير تباين المتغير العشوائي:

$\delta^2 \varepsilon_t = \frac{\varepsilon t2}{n-2}$ $\delta^2 \varepsilon_t = \frac{89,88}{8}$ $\delta^2 \varepsilon_t = 11.23$

4. التباين المقدر للمقدرات:

- **تباين $\hat{\alpha}$**

$v(\hat{\alpha}) = \delta^2 \varepsilon_t [\frac{\bar{x}^2}{x^2} + \frac{1}{n}]$ $v(\hat{\alpha}) = 11,23[\frac{7^2}{30} + \frac{1}{10}]$ $v(\hat{\alpha})=19.47$

- تباين β

$v(\hat{\beta}) = \delta^2 \varepsilon_t [\frac{1}{x^2}]$ $v(\hat{\beta}) = 11.23(\frac{1}{30})$ $v(\hat{\beta}) = 0.37$

5. إيجاد معامل التحديد R^2:

$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{\sum (Y - \bar{Y})^2}{\sum (Y - \bar{Y})^2}$ $R^2 = \frac{672,12}{762} = 0,8820$ $R^2 = 88,20\%$

***تشكيل جدول ANOVA:**

مصدر التغيير	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط المربعات
المتغير المستقل	ESS=272.12	1	$\sum (Y - \bar{Y})^2/1 = 272.12/1 = 272.12$
البواقي	RSS=89.88	n-2=10-2=8	$\sum e_t^2/n-2=89.88/8=11.23$
المجموع	TSS=762	n-1=10-1=9	/

- ESS مجموع مربعات الانحرافات المفسرة $\sum (\hat{Y} - \bar{Y})^2$
- RSS مجموع مربعات البواقي $\sum e_t^2$
- TSS مجموع الانحرافات الكلية $\sum (Y - \bar{Y})^2$

6- اختبار ستودنت عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$

- **بالنسبة لـβ:**

$$\begin{cases} H_0: \beta = 0 \\ H_1: \beta \neq 0 \end{cases}$$

$\beta = 0$

$St_{cal} = \left| \frac{\hat{\beta} - \beta}{\sqrt{\delta^2 \beta}} \right|$ $St_{cal} = \left| \frac{\hat{\beta} - 0}{\sqrt{\delta^2 \beta}} \right|$

$St_{cal} = \left| \frac{\hat{\beta}}{\sqrt{\delta^2 \beta}} \right| \rightsquigarrow St_{tab}{}^{\alpha/2}{}_{(n-2)}$

*نقوم بمقارنة الاحصاءة المجدولة لستودنت عند مستوى معنوية $\frac{\alpha}{2}$ وعند درجة حرية $n-2$ مع الاحصاءة المحسوبة.

$St_{tab}{}^{\alpha/2}{}_{(n-2)} = 2.306$

$St_{cal} = \left| \frac{\hat{\beta}}{\sqrt{\delta^2 \hat{\beta}}} \right|$ $St_{cal} = \left| \frac{4.73}{\sqrt{0.37}} \right|$

$St_{cal} = \left| \frac{4.73}{0.61} \right|$ $St_{cal} = 7.75$

$St_{cal} > St_{tab}$ نرفض الفرضية H_0 ومنه, $\beta \neq 0$ وبالتالي وجود علاقة ذات دلالة إحصائية بين المتغير المستقل(الانفاق على الإعلانات) وعوائد المبيعات(المتغير التابع).

بالنسبة لـα:

$$\begin{cases} H_0: \alpha = 0 \\ H_1: \alpha \neq 0 \end{cases}$$

$\alpha = 0$

$St_{cal} = \left| \frac{\hat{\alpha} - \alpha}{\sqrt{\delta^2 \hat{\alpha}}} \right|$ $St_{cal} = \left| \frac{\hat{\alpha} - 0}{\sqrt{\delta^2 \hat{\alpha}}} \right|$

$St_{cal} = \left| \frac{\hat{\alpha}}{\sqrt{\delta^2 \hat{\alpha}}} \right| \rightsquigarrow St_{tab}{}^{\alpha/2}{}_{(n-2)}$

$St_{tab}{}^{\alpha/2}{}_{(n-2)} = 2.306$

$St_{cal} = \left| \frac{\hat{\alpha}}{\sqrt{\delta^2 \hat{\alpha}}} \right|$ $St_{cal} = \left| \frac{21.86}{\sqrt{19.47}} \right|$

$St_{cal} = \left| \frac{21.86}{4.41} \right|$ $St_{cal} = 4.96$

$St_{cal} > St_{tab}$ نرفض الفرضية H_0 ومنه $0 \neq \alpha$ وبالتالي وجود الحد الثابت له دلالة إحصائية في النموذج.

7 -اختبار فيشر:

$$\begin{cases} H_0: \alpha = \beta = 0 \\ H_1: \alpha \neq 0 \vee \beta = 0 \end{cases}$$

$$F_{cal} = \frac{\frac{R^2}{2-1}}{\frac{1-R^2}{n-2}} \qquad \frac{\frac{0.882}{2-1}}{\frac{1-0.882}{10-2}} \qquad \frac{0.882}{0.01475}$$

$F_{cal} = \mathbf{59.79}$ $F_{tab}^{\alpha=5\%}{}_{(1,\, n-2)} = \mathbf{3.32}$

$f_{cal} > f_{tab}$ نرفض الفرضية H_0 ومنه $\alpha \neq 0$ و $\beta \neq 0$ بالتالي وجود الحد الثابت والمتغير المستقل لهما دلالة إحصائية في النموذج.

إيجاد عائد المبيعات عند تخصيص انفاق على الإعلانات بمقدار12مليون دينار جزائري لسنة 2019

$$\hat{Y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}.X_t$$

$$\hat{Y}_t = 21.86 + 4.73X_t$$

$t = 10+1$ $X_{10+1} = 12$

$\hat{Y}_{10+1} = 21.86 + 4.73(12)$ $\hat{Y}_{10+1} = \mathbf{78.62}$

عائد المبيعات المتوقع لسنة 2019هو **78.62**مليون دينار جزائري.