Université Abdelhafid Boussouf - Mila $2023 - 2024$
Institut des Mathématiques et informatique
Département des Mathématiques **L3 :Mathématiques Appliquées**

Série no 1 : Optimisation multidimensionnelle

Exercice 1. *Utiliser les règles de la dérivation pour trouver le Gradient ∇f des fonction suivantes,*

$$f(x) = \frac{b^T x}{x^T A x}, \quad f(x) = (\alpha x + \beta)^T A(\alpha x + \beta), \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Exercice 2.

1. *Déterminer le gradient et la matrice Hessienne de la fonction polynomiale*

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f, \ \ x, y \in \mathbb{R}.$$

2. *Soit A une matrice symétrique d'ordre $n \times n$, b un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et c une constante. f une fonction définie par,*

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + c, \ \ x \in \mathbb{R}^n$$

- Montrer que $f(x^* + h) = f(x^*) + \frac{1}{2}\langle Ah, h\rangle$, tel que x^* un minimum local.

Exercice 3. *Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction suivante soit convexe,*

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + axy, \ \ x, y \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4. *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par*

$$f(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2x - 10y.$$

1. *Montrer que f est coercive sur $\mathbb{R}^3$. Que peut-on en déduire ?*
2. *Montrer que la matrice hessienne de f est définie positive. Que peut-on en conclure ?*
3. *Déterminer le minimum local de f sur $\mathbb{R}^3$.*

Exercice 5. *Soient $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ une matrice et $b \in \mathbb{R}^m$ un vecteur. On définit la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par,*

$$f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|^2.$$

1. *Montrer que f est une fonctionnelle quadratique.*
2. *Déterminer le gradient $\nabla f(x)$ et le hessien $\nabla^2 f(x)$.*
3. *Montrer que f est convexe. Que peut-on conclure ?*

Exercice 6. *Soit la fonction f à minimiser définie par,*

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{7}{2}x_2^2.$$

1. *Écrire la relation de récurrence obtenue si on met en ouvre l'algorithme du gradient à pas constant $\alpha > 0$.*
2. *Écrire la suite obtenue à partir de $x^{(0)}$ donné et en prenant $\alpha = \frac{1}{7}$. Puis montrer qu'elle converge vers la solution du problème.*
3. *$\alpha = \frac{1}{7}$ est-elle la valeur optimale du paramètre α.*

Exercice 7.

On considère la fonction, $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2^2)$.

1. Montrer que la direction $d = (1, -1)^t$ est une direction de descente au point $x^{(0)} = (0, 1)^t$.
2. Déterminer le pas optimal α_0 qui minimise $g(\alpha) = f(x^{(0)} + \alpha d)$ puis calculer $x^{(1)} = x^{(0)} + \alpha_0 d$.
3. Calculer la direction $\widetilde{d}$ associée à la méthode de Newton au point $x^{(0)}$. S'agit-il d'une direction de descente ?
4. Faire une itération de la méthode de Newton. Conclure.