Centre universitaire de Mila
Institut de Mathématiques et Informatique
Première année LMD informatique 2023-2024
Matière : Algèbre II **Série 3**

Exercice n°1 : Soit

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & f(P) = P + (1-X)P'. \end{array}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $E = \mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer une base de $\ker(f)$ et $Im(f)$.

Exercice n°2 : Soient E, F, G trois $K-$espaces vectoriels. Montrer que

1. $\forall f \in \mathfrak{L}_K(E,F), \forall g \in \mathfrak{L}_K(F,G) : g \circ f \in \mathfrak{L}_K(E,G)$.
2. $\forall f_1, f_2 \in \mathfrak{L}_K(E,F), \forall g \in \mathfrak{L}_K(F,G) : g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2$.
3. $\forall f \in \mathfrak{L}_K(E,F), \forall g_1, g_2 \in \mathfrak{L}_K(F,G) : (g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$.
4. $\forall \alpha \in K, \forall f \in \mathfrak{L}_K(E,F), \forall g \in \mathfrak{L}_K(F,G) : (\alpha g) \circ f = g \circ (\alpha f) = \alpha (g \circ f)$.

Exercice n°3 : Soient E, F deux $K-$espaces vectoriels, $f \in \mathfrak{L}_K(E,F)$, $L = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ une famille des vecteurs de E et $S \subset E$. Montrer que

1. Si S est un sous espace vectoriel de E, alors $f(S)$ est un sous espace vectoriel de F.
2. Si L est libre et f est injective, alors $f(L)$ est libre.
3. Si f est surjective et si la famille L est génératrice de E, alors la famille $f(L)$ est génératrice de F.

Exercice n°4 : Soient $\mathbb{R}_2[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] : \deg(P) \leqslant 2\}$ et f une application définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X] : f(P) = -\frac{(X+1)^2}{2}P'' + (X+1)P'$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$. En déduire que $f \circ f = f$.
2. Construire une base pour chacun des sous espaces vectoriels $Ker(f)$ et $Im(f)$. En déduire le rang de f.
3. Montrer que $\mathbb{R}_2[X] = \ker(f) \oplus Im(f)$

Exercice n°5 : **(Supplémentaire)** Soient $\mathbb{R}_2[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] : \deg(P) \leqslant 2\}$ et f une application définie de $\mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X] : f(P) = a + b\sqrt{2}$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau de f. En déduire que $L = \left\{P_1 = 1, P_2 = \sqrt{2}X^2 - X\right\}$ forme une base de $\ker(f)$
3. Montrer que $B' = \left\{P_1 = 1, P_2 = \sqrt{2}X^2 - X, P_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}X\right\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. On considère une application linéaire $g : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ telle que

$$g(P_1) = g(P_2) = 0, g(P_3) = P_3$$

   (a) Montrer que $g \circ g = g$.
   (b) Déterminer $\ker(g)$.

Exercice n°2 : **(Supplémentaire)** Soit E un $K-$espace vectoriel. Soit un f endomorphisme de E tel que $f^2 = Id_E$. On pose $F_1 = \ker(f - Id_E)$ et $F_2 = \ker(f + Id_E)$.

1. Calculer $f(x_1)$ et $f(x_2)$ pour tout $x_1 \in F_1$ et pour tout $x_2 \in F_2$.
2. Montrer que $E = F_1 \oplus F_2$.