

## Discrete Random Variables

**تمهيد:** عند اجراء التجربة الإحصائية (العشوائية) وتعيين فراغ العينة، لا يكون الاهتمام منصب على النتائج الممكنة في حد ذاتها وإنما يكون حول القيم العددية المرتبطة بتلك النتائج. إن القيم العددية هي ما نعبر عنها بالمتغير العشوائي. هذا الأخير والذي يرمز له بالرمز  $X$  هو اقتران أو دالة حقيقية مجال تعريفه فضاء أو فراغ العينة ومداه مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

إذن المتغير العشوائي هو المتغير الذي يتم الحصول على قيمه نتيجة لتجربة عشوائية يكون لكل قيمة من القيم التي يأخذها المتغير احتمال معين.

يأخذ المتغير العشوائي عددا محدودا (Finite Number) أو عدد غير محدود يمكن عدده (Countably Infinite Number) من القيم ويسمى في هذه الحالة متغيرا عشوائيا منفصلا (Discrete Random Variable)، في حين لما يأخذ المتغير عددا لا نهائيا من القيم لا يمكن عددها يسمى بالمتغير العشوائي المتصل.

فيما يلي سوف نتناول المتغيرات العشوائية المنفصلة أو المتقطعة.

**1. تعريف المتغير العشوائي المتقطع:** المتغير العشوائي المتقطع هو الذي يأخذ قيمة من قيم الأعداد الصحيحة؛ بمعنى أن هذه المتغيرات تأخذ عددا منتهيا من القيم الممكنة، يرمز لـ م.ع.م بشكل عام بالحرف ( $X$ ) ويرمز للقيم التي يأخذها بـ ( $x_i$ )

حيث يكتب كما يلي:  $X = \{X = x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ .

إذن يكون المتغير العشوائي متقطعا (منفصلا) إذا كان مداه (Range) قابل للعد.

## 2. التوزيع الاحتمالي (Probability distribution)

التوزيع الاحتمالي هو مجموعة القيم الممكنة مع الاحتمالات المرتبطة بقيم المتغير، يعبر عن احتمال قيمة معينة

كما يلي:  $P(X = x_i)$  وتكتب أيضا  $f_x$ ، هذه الأخيرة تسمى بـ دالة الكثافة الاحتمالية.

$X$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_n$
$P(X = x_i)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	$P(X = x_3)$	...	$P(X = x_n)$

يأخذ التوزيع الاحتمالي الشكل التالي:

مثال: أوجد التوزيع الاحتمالي لـ  $X$ : عدد مرات ظهور الصورة (F) من رميتين لقطعة نقد.

إذن القيم التي يأخذها  $X$  هي:

$$X = \{x = 0, 1, 2\}$$

التجربة	PP	PF	FP	FF
ظهور F	0	1	1	2

ومنه التوزيع الاحتمالي يكون كما يلي:

$X$	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

فالتوزيع الاحتمالي هو الجدول الذي يتضمن جميع القيم الممكنة للمتغير العشوائي مع الاحتمال الخاص لكل

منها.

### 3. دالة الكثافة الاحتمالية

إن الاحتمال  $P(X = x_i)$  يسمى بدالة الكثافة الاحتمالية ويرمز لها بالرمز  $f(x)$  بحيث يجب أن تحقق شرطين:

$$f(x) \geq 0 \quad \checkmark$$

$$\sum_{i=1}^n f(x) = 1 \quad \checkmark$$

مثال: من المثال السابق أوجد  $f(x)$ .

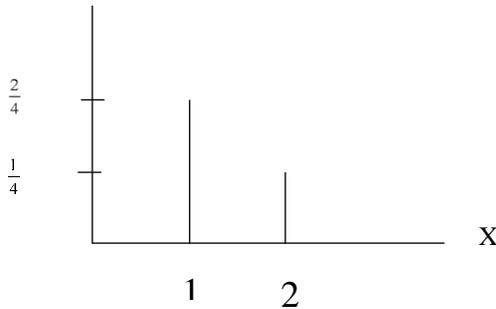
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \dots x=0,2 \\ \frac{2}{4} & \dots x=1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

### Diagramme en bâtons

### 4. التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$

$f(x)$

يتم تمثيل  $f(x)$  من خلال قضبان متوازية على محور الفواصل كما يلي:



## 5. دالة التوزيع F(X)

**1.5 تعريف:** تعرف دالة التوزيع (الدالة التجميعية)  $F(x)$  بأنها "احتمال بأن يكون  $x$  أقل أو يساوي  $x_i$ ".  
ومنه تعرف  $F(x)$  رياضيا كما يلي:  $F(x) = P(X \leq x_i)$  ، ومنه يمكن استنتاج دالة التوزيع  $F(x)$  من دالة الكثافة

$$F(x) = P(X \leq x_i) = \sum_{x_i \leq x} f(x) \text{ كما يلي: } f(x) \text{ الاحتمالية}$$

$$X = \{x = 0, 1, 2\}$$

مثال: أوجد دالة التوزيع للمثال السابق.

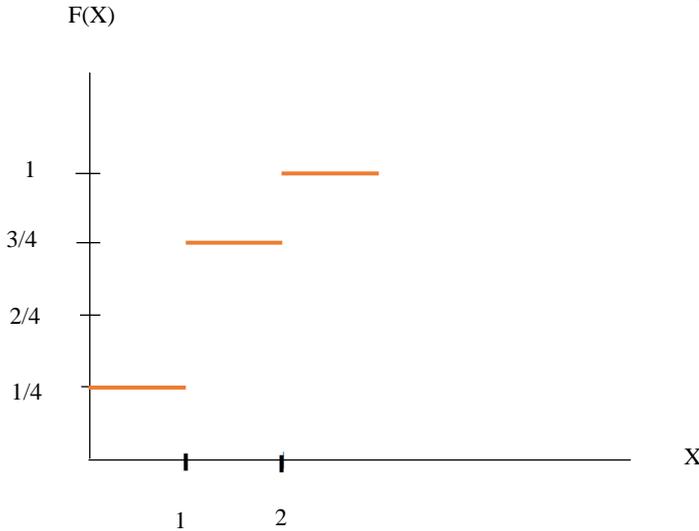
$$F(0) = P(x \leq 0) = P(x = 0) = \frac{1}{4}$$

$$F(1) = P(x \leq 1) = P(x = 0) + P(x = 1) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$$

$$F(2) = P(x \leq 2) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

ومنه يمكن توضيح كل من  $f(x)$  و  $F(x)$  في الجدول التالي:

$x$	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$
$F(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1



**ملاحظة:** تأخذ دالة التوزيع  $F(x)$  للمتغير العشوائي المنفصل شكلا سلميا وهي لا تكون متناقصة عند أي قيمة وأكبر

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

قيمة ممكنة لهل تساوي 1؛ أي:

## 6. التوقع الرياضي والتباين للمتغير العشوائي المنفصل.

**1.6. التوقع الرياضي  $E(X)$ :** تمثل القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي المنفصل مقياس النزعة المركزية، ويعرف التوقع

$$E(x) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot f(x) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i$$

الرياضي على أنه:

**2.6. التباين  $V(X)$ :** التباين هو عبارة عن توقع مربع انحرافات القيم عن توقعها الرياضي، على هذا الأساس يعرف

التباين لمتغيرة عشوائية منفصلة كما يلي:

$$V(x) = E(x_i - E(x))^2$$

$$V(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(x))^2 p_i$$

$$V(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - E(x)^2$$

**ملاحظة:** من التباين نحدد الانحراف المعياري للمتغيرة العشوائية المنفصلة بأنه الجذر التربيعي لـ  $V(x)$

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)}$$

**مثال:** أحسب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري للمثال السابق.

$X_i$	0	1	2	$\Sigma$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1
$x_i P_i$	0	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$	1
$x_i^2 P_i$	0	$\frac{2}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{6}{4}$

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i = 0 + \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1$$

$$V(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - E(x)^2$$

$$V(X) = (0 + \frac{2}{4} + \frac{4}{4}) - (1)^2 = \frac{6}{4} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

3.6. بعض النظريات حول التوقع والتباين

التباين	التوقع
إذا كان $c$ تمثل أي ثابت فإن: $V(cX) = c^2V(X)$	إذا كان $c$ تمثل أي ثابت فإن: $E(cX) = cE(X)$
إذا كان $a, b$ تمثل أي ثابتين فإن: $V(aX + b) = a^2V(X)$	إذا كان $a, b$ تمثل أي ثابتين فإن: $E(aX + b) = aE(X) + b$
إذا كانت $X, Y$ أي متغيرين عشوائيين مستقلين فإن: $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$	إذا كانت $X, Y$ أي متغيرين عشوائيين فإن: $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
إذا كانت $X, Y$ أي متغيرين عشوائيين مستقلين فإن: $V(X - Y) = V(X) + V(Y)$	إذا كانت $X, Y$ أي متغيرين عشوائيين مستقلين فإن: $E(XY) = E(X).E(Y)$

**ملاحظة:** ما ينطبق على المتغيرات المستقلة ينطبق على الأحداث المستقلة والتي تم التطرق لها في المحاضرات السابقة.

مثال:  $X$  متغير عشوائي توقعه الرياضي يساوي 50 وتباينه يساوي 70 ، فإذا كان  $Y = 0.8X + 15$ .  
المطلوب: أوجد توقع وتباين  $Y$ .

$$E(Y) = E(0.8X + 15) = 0.8E(X) + 15 = 0.8(50) + 15 = 55$$

$$V(Y) = a^2.V(X) = (0.8)^2.70 = 44.8$$

مثال:  $X$  متغير عشوائي توقعه الرياضي يساوي 70 وتباينه يساوي 36 .

المطلوب: أوجد الوسط الحسابي والتباين لـ:

• للمتغير  $Y$  حيث  $Y = -2X + 5$ ؛

• للمتغير  $Z$  حيث  $Z = \frac{X - 70}{6}$ .

المتغير $Z$	المتغير $Y$
$E(Z) = aE(X) + b = \frac{1}{6} \times 70 - \frac{70}{6} = 0$	$E(Y) = aE(X) + b = -2 \times 70 + 5 = -135$
$V(Y) = a^2.V(X) = (-2)^2.36 = 144$	$V(Y) = a^2.V(X) = (-2)^2.36 = 144$
$V(Z) = a^2.V(X) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times 36 = 1$	