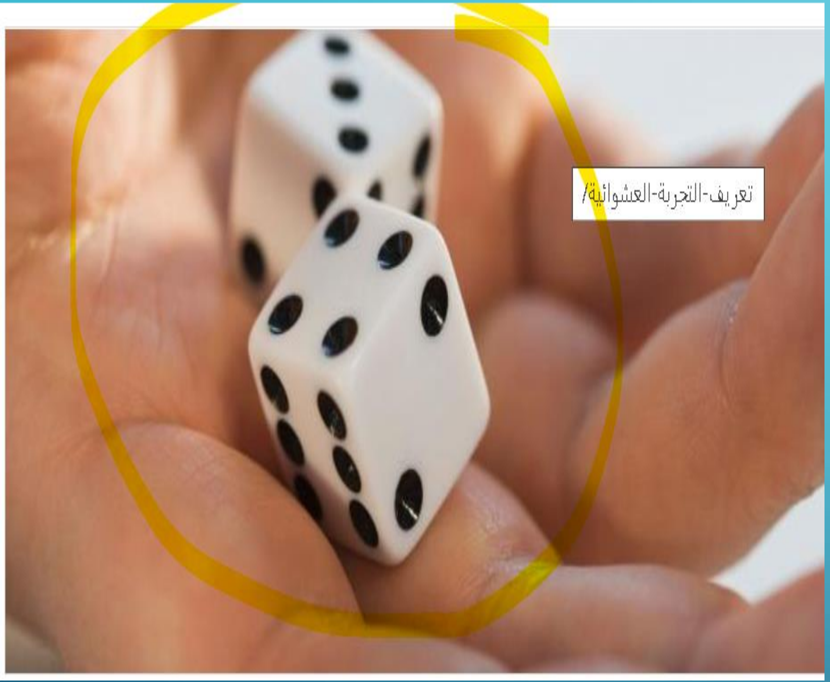
المحاضرة 3: حساب الاحتمالات

- بعض المفاهيم الخاصة بالاحتمال.
- قوانين الاحتمالات.
- الاحتمال الشرطي.
- نظرية بايز.

1) بعض المفاهيم

التجربة العشوائية



نعم

- يمكن تحديد النتائج الممكنة

لا

- لا يمكن تحديد النتيجة التي سوف تظهر

النتائج الممكنة

رمي قطعة نقد

- ظهور صورة أو كتابة

$\{F, P\}$

فراغ العينة

هو مجموعة كل النتائج الممكنة للتجربة العشوائية، يرمز:

$$Card(\Omega)$$

مثال: عند رمي قطعة نقد فإن النتائج الممكنة هي:

ظهور الصورة (F)، أو ظهور الكتابة (P).

إذن النتائج الممكنة هي: $\{F,P\}$

فراغ العينة: نجد أن $\Omega = S = \{F,P\} \Rightarrow n(S) = 2$

أي أن عدد النتائج يساوي 2؛ $Card(\Omega) = n(S) = 2$

الحدث

هو فئة جزئية أو مجموعة جزئية من النتائج المكونة لفراغ العينة، ويرمز له بـ

C, B, A

يمكن أن يكون الحدث بسيط كما يمكن أن يكون مركب.

نرمي زهرة نرد مرة واحدة،

نعرف الحادث A بأنه ظهور عدد يقبل القسمة على 3.

الحادث B بأنه ظهور عدد فردي.

الحادث C يقبل القسمة على 3 وأكبر من 5.

2.قوانين الاحتمالات

الحادث A

P(A)

$$P(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$$

$$0\leq P(A)\leq 1$$

قاعدة الضرب

قاعدة الجمع

أ) جمع الاحتمالات:

هنا نطبق قاعدة أو؛ OU

هنا نجد حالتين؛ الحوادث متنافية وغير متنافية

متنافية

$$A \cap B = \varnothing$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

غير متنافية

$$A \cap B \neq \varnothing$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثال: نرمي زهرة نرد مرة واحدة. نعرف الحوادث التالية:

$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\},card(\Omega)=6$

A: ظهور عدد فردي	$A=\{1,3,5\},card(A)=3$	$P(A)=\frac{3}{6}$
B: ظهور عدد يقبل القسمة على 3	$B=\{3,6\},card(B)=2$	$P(B)=\frac{2}{6}$
C: ظهور عدد أكبر من 5	$C=\{6\},card(c)=1$	$P(C)=\frac{1}{6}$

أوجد: $P(A\cup B),P(A\cup C)$

$P(A\cup B)$	$A\cap B=\{3\},card(A\cap B)=1$	$P(A\cup B)=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}-\frac{1}{6}=\frac{4}{6}$
$P(A\cup C)$	$A\cap C=\varnothing$	$P(A\cup C)=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}$

أ) ضرب الاحتمالات: هنا نطبق قاعدة و؛ ET

هنا نجد حالتين؛ الحوادث المستقلة وغير المستقلة

مستقلة

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

غير مستقلة

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B / A)$$

يعني وقوع الحادث B شرط تحقق (أو وقوع) الحادث A أولا

ويسمى **بالحادث الشرطي**.

نظريات مهمة

- ✓ إن احتمال حدوث الحادثة الخالية $\varnothing$ يساوي 0، أي أن: $P(\varnothing)=0$

$$S \cup \varnothing = S \Rightarrow P(S \cup \varnothing) = P(S)$$

$$\Rightarrow P(S) + P(\varnothing) = P(S) \Rightarrow P(\varnothing) = P(S) - P(S) = 0$$

- ✓ احتمال حدوث الحادثة A مضاف إليه احتمال مكملتها $\overline{A}$ يساوي 1.

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

$$A \cup \overline{A} = S \Rightarrow P(A \cup \overline{A}) = P(S) \Rightarrow P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

- ✓ احتمال حدوث مكملة A أو مكملة B؛ أي $(\overline{A}\cup\overline{B})$، يساوي احتمال مكملة A وB.

أي؛

$$P(\overline{A}\cup\overline{B}) = P(\overline{A\cap B}) = 1 - P(A\cap B)..........*$$

- ✓ احتمال حدوث مكملة A و مكملة B؛ أي $(\overline{A}\cap\overline{B})$، يساوي احتمال مكملة A أوB.

أي؛

$$^{1}\, P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1 - P(A\cup B).......*$$

✓ إذا كان A و B حادثين، إن احتمال حدوث A وعدم حدوث B $(\overline{B})$ يساوي احتمال حدوث A مطروحا منه احتمال حدوث A و B. $P(A\cap\overline{B}) = P(A) - P(A\cap B)$

ملاحظة هامة: في حالة وجود ثلاث حوادث C, B, A وكان $P(A)\neq 0$ و $P(A\cap B)\neq 0$ فإن:

$$P(A\cap B\cap C)) = P(A).P(B/A).P(C/A\cap B)$$

3. الاحتمال الشرطي

إدا كان A و B حدثان وكان $P(B) \neq 0$

فإن الاحتمال الشرطي للحادث A

بشرط وقوع B يحسب كما يلي:

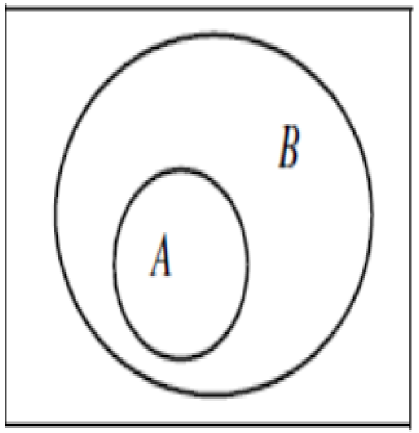
$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$P(B) \neq 0$

احتمال وقوع **A** بشرط وقوع (أو معلومية) **B**"

حالات خاصة:

- إذا كان الحادث A مثلا محتواة في الحادث B كما يبين مخطط Venn:

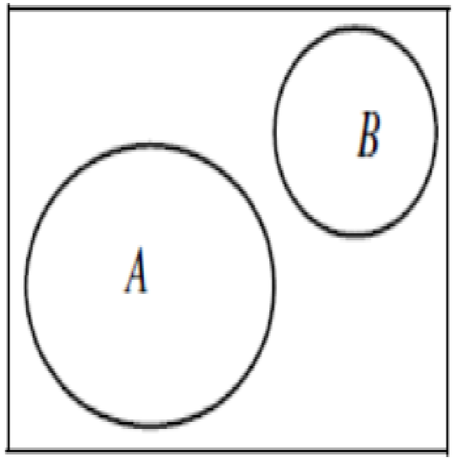


إذا كان $(A \subset B)$ فإن $P(A \cap B) = P(A)$ فإن:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$$

- لما يكون $(A \cap B) = \varnothing$ كما يوضحه مخطط Venn:



$$(A \cap B) = \varnothing$$

$$P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0}{P(B)} = 0$$

مثال: نرمي قطعتي نرد مرة واحدة، نسمي **الحادث A** مجموع الوجهين **الظاهرين يساوي 6**. **الحادث B** إحدى **الوجهين الظاهرين هو 2**.

S1	1	2	3	4	5	6

S2	1	2	3	4	5	6

A	المجموع يساوي 6
B	ظهور العدد 2

الحالات الكلية لرمي زهرة نرد مرتين متتاليتين

	1	2	3	4	5	6
1	1,1	**1,2**	1,3	1,4	**1,5**	1,6
2	**2,1**	**2,2**	**2,3**	**(2,4)**	**2,5**	**2,6**
3	3,1	**3,2**	**3,3**	3,4	3,5	3,6
4	4,1	**(4,2)**	4,3	4,4	4,5	4,6
5	**5,1**	**5,2**	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	**6,2**	6,3	6,4	6,5	6.6

الحل

رمي زهرتين نرد، إذن الحالات الكلية تساوي 36.

$$Card(\Omega) = n^p = 6^2 = 36$$

$$A = \{(2.4),(4.2),(1.5),(5.1),(3.3)\} \to n(A) = 5$$

$$B = \{(1.2),(2.1),(2.2),(2.3),(2.4),(2.5),(2.6),(3.2),(4.2),(5.2),(6.2)\} \to n(B) = 11$$

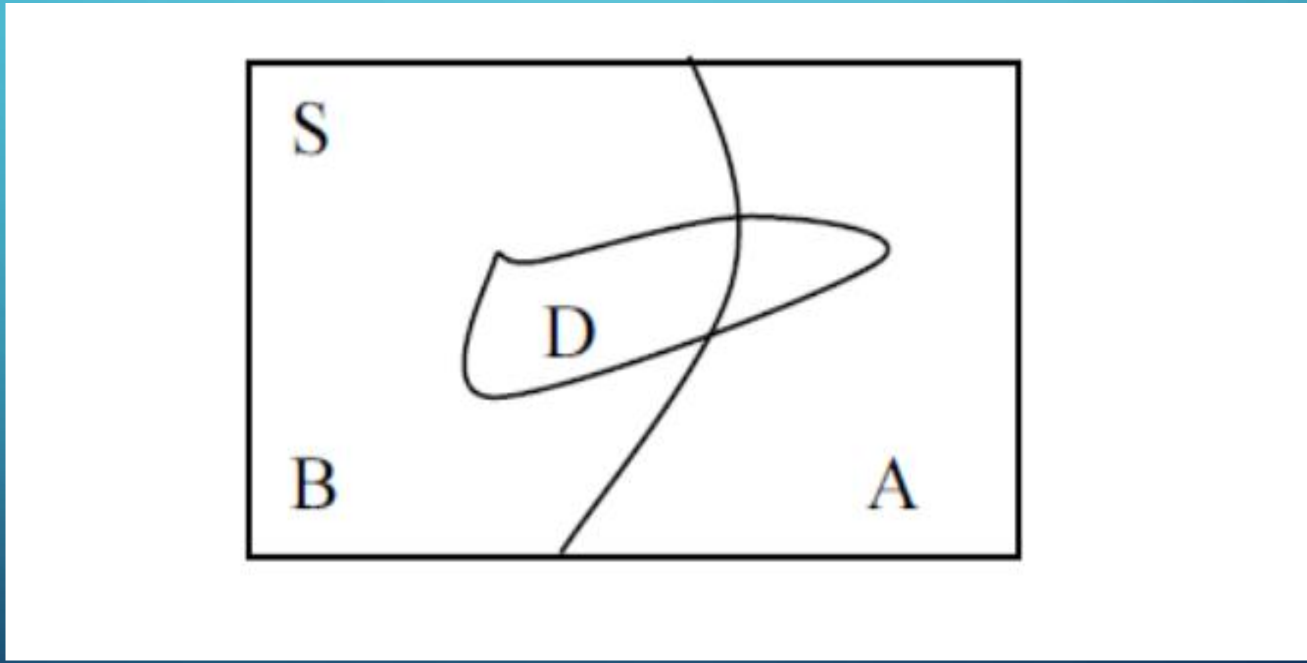
$$P(A) = \frac{5}{36}, \ldots\ldots\ldots P(B) = \frac{11}{36}$$

$$A \cap B = \{(2.4),(4.2)\} \to n(A \cap B) = 2$$

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{2/36}{5/36} = \frac{2}{5}$$

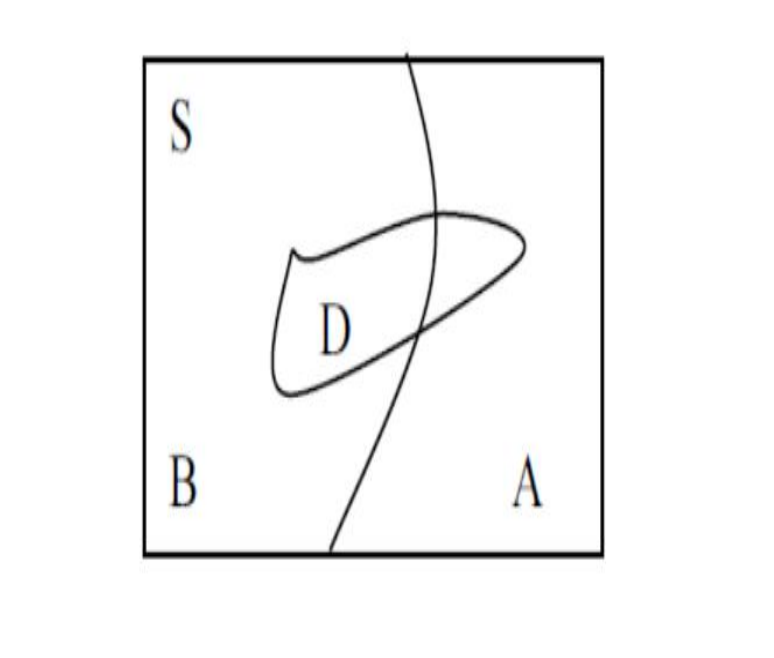
4. نظرية بايز Théoréme de Bayes

إذا كان A و B حادثين شاملين ومتنافيين في الفراغ S وكان الحادث D أي حادث في نفس الفراغ، حيث $P(D) \neq 0$



أولا، نقوم بحساب إحتمال D

$$P(D) = ?$$



$$S = A \cup B \ldots\ldots\ldots \rightarrow / S = A + B \ldots\ldots\ldots 1$$

$$D \cap S = D \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2 \rightarrow$$

$$D = D \cap (A \cup B)$$

$$D = (D \cap A) + (D \cap B)$$

$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B)$$

$$P(D) = P(D / A).P(A) + P(D / B).P(B)$$

ثانيا: الآن نقوم بحساب كل $P(A/D)$ و $P(B/D)$

$$P(A/D)=\frac{P(D\cap A)}{P(D)}=\frac{P(D/A).P(A)}{P(D/A).P(A)+P(D/B).P(B)}$$

$$P(B/D)=\frac{P(D\cap B)}{P(D)}=\frac{P(D/B).P(B)}{P(D/A).P(A)+P(D/B).P(B)}$$

نظرية بايز

مثال

مصنع انتاجي يحتوي على ثلاث آلات (M_1, M_2, M_3) تنتج ما نسبته 35%، 40% و25% على الترتيب من الإنتاج الكلي للمصنع علما بأن نسبة الإنتاج التالف من انتاج الآلات هو 6%، 3% و8% على الترتيب.

سحبت وحدة انتاج من المصنع عشوائيا فكانت تالفة.

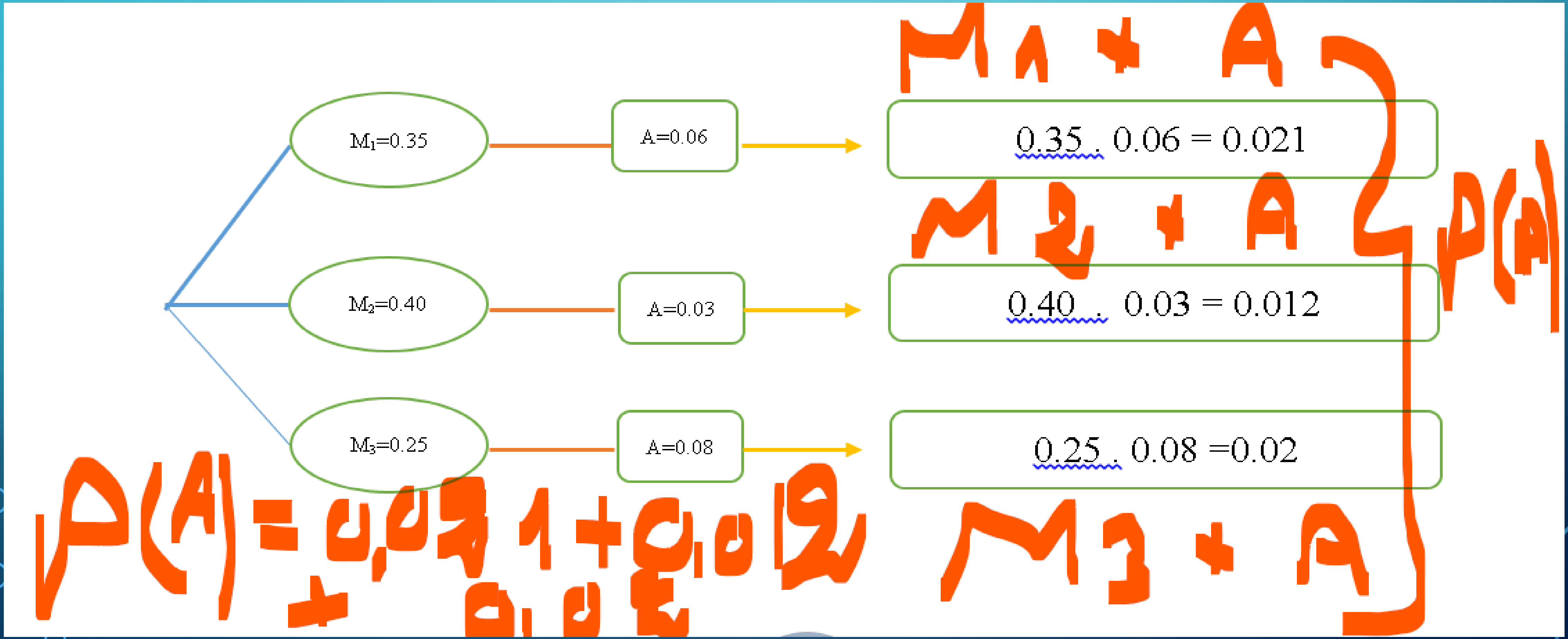
المطلوب:

- ✓احسب احتمال أن تكون الوحدة المسحوبة تالفة؟
- ✓احسب احتمال أن تكون من انتاج الآلة (M1)؟
- ✓احسب احتمال أن تكون من انتاج الآلة (M2)؟
- ✓احسب احتمال أن تكون من انتاج الآلة (M3)؟

لدينا انتاج الآلات كما يلي:

P(M1)=0.35, P(M2)=0.40, P(M3)=0.25

سحبنا وحدة انتاج فكانت تالفة (A)؛ أي P(A) محققة.



نحسب الآن احتمال أن الوحدة تالفة؛ أي $P(A)$: يكون تالف إما من M_1 أو من M_2 أو من M_3

$$P(A) = P(M_1).P(A/M_1) + P(M_2).P(A/M_2) + P(M_3).P(A/M_3)$$

$$P(A) = (0.35 \times 0.06) + (0.40 \times 0.03) + (0.25 \times 0.08)$$

$$P(A) = 0.021 + 0.012 + 0.02 = 0.053$$

احتمال أن تكون الوحدة التالفة من **M_1**. رياضيا نعبر عن هذا الاحتمال بما يلي

$P(M_1/A)$

$$P(M_1/A)=\frac{P(M_1\cap A)}{P(A)}=\frac{P(M_1).P(A/M_1)}{P(A)}$$

$$P(M_1/A)=\frac{0.35\times 0.06}{0.053}\simeq 0.40$$

احتمال أن تكون الوحدة التالفة من M_2. رياضيا نعبر عن هذا الاحتمال بما يلي: $P(M_2/A)$

$$P(M_2/A)=\frac{P(M_2\cap A)}{P(A)}=\frac{P(M_2).P(A/M_2)}{P(A)}$$

$$P(M_2/A)=\frac{0.4\times 0.03}{0.053}\simeq 0.22$$

احتمال أن تكون الوحدة التالفة من M_3. رياضيا نعبر عن هذا الاحتمال بما يلي: $P(M_3/A)$

$$P(M_3 / A) = \frac{P(M_3 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(M_3).P(A / M_3)}{P(A)}$$

$$P(M_3 / A) = \frac{0.25 \times 0.08}{0.053} \simeq 0.38$$

نلاحظ أن مجموع الاحتمالات يساوي 1؛ أي:

$$P(M_1 / A) + P(M_2 / A) + P(M_3 / A) = 0.40 + 0.22 + 0.38 = 1$$