تمهيد: يقصد بالاحتمال فرصة حدوث أو وقوع حادثة معينة، وتستخدم الاحتمالات في الكثير من النواحي التطبيقية مثل المجال الاقتصادي والتجاري والطبي و......

لإثراء هذا الموضوع سوف يتم تناول المواضيع التالية:

- ✓ بعض المفاهيم الخاصة بالاحتمال.
- ✓ قوانين الاحتمالات.
- ✓ الاحتمال الشرطي.
- ✓ نظرية بايز.

1.بعض المفاهيم الخاصة بالاحتمال

من أجل فهم الاحتمال هناك بعض المفاهيم والمصطلحات لابد من التطرق لها أهمها:

أ. التجربة العشوائية: هي أي عملية تتم (تجربة) يمكن تحديد كل النتائج الممكنة لها، لكن لا يمكن مسبقا تحديد النتيجة التي ستظهر أو تحدث.

مثال 1: عند رمي قطعة نقد فإن النتائج الممكنة هي: ظهور الصورة (F)، أو ظهور الكتابة (P).

إذن النتائج الممكنة هي: $\{F,P\}$.

مثال 2: رمي قطعة نقد وزهرة نرد مرة واحدة؛ النتائج الممكنة هي:

$$\Omega=\{(H,1),(H,2),(H,3),(H,4),(H,5),(H,6),(P,1),(P,2),(P,3),(P,4),(P,5),(P,6)\}$$

ب.فراغ العينة (Sample Space): هو مجموعة كل النتائج الممكنة للتجربة العشوائية. يرمز له بالرمز omega (Ω) أو بـ (S).

من المثال 1 أعلاه نجد أن $\Omega=S=\{F,P\}\Rightarrow n(S)=2$

أي أن عدد النتائج يساوي 2؛ $Card(\Omega)=n(S)=2$

ملاحظة: يمكن أن يكون فراغ العينة به عدد محدود من الإمكانيات ويسمى بفراغ العينة المحدد، أما إذا كان به عدد غير محدود من الإمكانيات فيسمى بفراغ العينة الغير محدود أو اللانهائي. طبعا فراغ العينة المحدود يطلق عليه فراغ العينة المنفصل، في حين فراغ العينة اللانهائي فيسمى بفراغ العينة المتصل.

مثال: سرعة السيارة في الطريق السيار (الحد الأقصى للسرعة 220 كلم في الساعة)

إذن، فراغ العينة قيمة متصلة من 0 إلى 220؛ أي $\Omega=\{x:0\prec x\leq 220\}$

ج. **الحدث (Event)**: هو مجموعة جزئية من النتائج المكونة لفراغ العينة، ويرمز له بـ A, B, C....، يمكن أن يكون الحدث بسيط كما يمكن أن يكون مركب؛ بمعنى آخر الحادث هو مجموعة مكونة من نتيجة بسيطة واحدة أو أكثر.

مثال: نرمي زهرتي نرد مرة واحدة؛ نسمي الحادث A بأنه مجموع الوجهين الظاهرين يساوي 7.

$$A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$

ملاحظات هامة:

- نقول أن الحدث A قد تحقق إذا كانت نتيجة التجربة العشوائية تنتمي إلى A؛
- نقول عن الحدث A أنه حدث أكيد إذا كان $A = \Omega$ ؛

مثال: نرمي زهرة نرد مرة واحدة، نسمي الحدث A ظهور عدد أقل من 7 إذن:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$A = \{1,2,3,4,5,6\} \rightarrow A = \Omega$$

- نسمي الحدث A بالحدث المستحيل إذا كان $A = \phi$ ، مثلا الحدث A ظهور الرقم 7 يعتبر حدث مستحيل التحقق؛
- إذا كان الحدث A يتكون من عنصر وحيد لـ **Ω**، يسمى بالحدث الابتدائي مثل $A = \{6\}$.

2.قوانين الاحتمالات

من مبادئ أو قوانين الاحتمالات نجد قاعدتين هما: قاعدة الجمع وقاعدة الضرب. لكن قبل ذلك ها هو الاحتمال وطريقة حسابه.

أ.الاحتمال: هو نسبة عددية غير سالبة محصورة بين الصفر والواحد، حيث تدل القيمة صفر على استحالة الحدوث والقيمة واحد على الحادث الأكيد الوقوع.

الاحتمال النظري لحدوث الحادث A هو نسبة عدد الحالات المواتية لحدوث A إلى عدد الحالات الممكنة أو الكلية، على فرض أن كل الحالات لها نصيب متكافئ في الحدوث. يرمز لاحتمال حدوث الحادث A بـــ P(A) ويحسب كما يلي:

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$$

حيث أن: $Card(A)$ تمثل عدد مرات ظهور A، أي الحالات المواتية.

$Card(\Omega)$ تمثل عدد الحالات الكلية أو الممكنة.

ملاحظة هامة: هناك بديهيات في حساب الاحتمالات:

- البديهية 1؛ من أجل أي حدث A فإن $P(A) \geq 0$ ؛
- البديهية 2؛ احتمال فراغات العينة S (الحالات الكلية) $P(S)=1$ ؛
- البديهية 3؛ إذا كانت الأحداث A1, A2, A3 أحداث متنافية فإن:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$

ب.جمع الاحتمالات: في حالة الجمع نطبق قاعدة أو (ou) والتي تؤدي إلى الاتحاد، فنقول احتمال الحادث A أوB؛أي $(A \cup B)$

هنا نجد حالتين، كون الحوادث متنافية أو غير متنافية.

ب.1. حالة الحوادث متنافية: إذا كان A وB حادثين متنافيين $(A \cap B = \varnothing)$ نجد أن:

$$P(A, ou, B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ب.2.حالة الحوادث غير متنافية: إذا كان A وB حادثين غير متنافيين $(A \cap B \neq \varnothing)$ نجد أن:

$$P(A, ou, B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثال: نرمي زهرة نرد مرة واحدة. نعرف الحوادث التالية: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}, card(\Omega) = 6$

A: ظهور عدد فردي	$A = \{1,3,5\}, card(A) = 3$	$P(A) = \frac{3}{6}$
B: ظهور عدد يقبل القسمة على 3	$B = \{3,6\}, card(B) = 2$	$P(B) = \frac{2}{6}$
C: ظهور عدد أكبر من 5	$C = \{6\}, card(c) = 1$	$P(C) = \frac{1}{6}$

أوجد: $P(A \cup B), P(A \cup C)$

$P(A \cup B)$	$A \cap B = \{3\}, card(A \cap B) = 1$	$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$
$P(A \cup C)$	$A \cap C = \varnothing$	$P(A \cup C) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$

ج.ضرب الاحتمالات: هنا نميز بين الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة. في الضرب نطبق قاعدة "و"(et)؛ أي التقاطع ونكتب $(A \cap B)$.

ج.1.الحوادث مستقلة: نقول عن الحدثين A, B أنهما حدثين مستقلين إذا كان حدوث أحدهما لا يؤثر على حدوث أو عدم حدوث الآخر. إذن إذا كان A وB حدثان مستقلان فإن:

$$P(A, et, B) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

ج.2.الحوادث غير مستقلة: إذا كان A و B حدثان غير مستقلان فإن وقوع أحدهما يؤثر على وقوع الآخر وبالتالي:

$$P(A, et, B) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B / A)$$

$P(B/A)$ يعني وقوع الحادث B شرط تحقق (أو وقوع) الحادث A أولا ويسمى **بالحادث الشرطي**.

ملاحظة هامة: إذا كان $P(B/A) = P(B)$ هذا يعني أن حدوث الحدث B لا يتأثر بحدوث أو عدم حدوث الحدث A وبالتالي فإننا نقول أن الأحداث A, B تمثل أحداثا مستقلة. وهذا يعني $P(B \cap A) = P(A).P(B)$

د.نظريات هامة:

- ✓ إن احتمال حدوث الحادثة الخالية $\varnothing$ يساوي 0، أي أن: $P(\varnothing) = 0$

$$S \cup \varnothing = S \Rightarrow P(S \cup \varnothing) = P(S)$$
$$\Rightarrow P(S) + P(\varnothing) = P(S) \Rightarrow P(\varnothing) = P(S) - P(S) = 0$$

- ✓ احتمال حدوث الحادثة A مضاف إليه احتمال مكملتها $\overline{A}$ يساوي 1.

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$
$$A \cup \overline{A} = S \Rightarrow P(A \cup \overline{A}) = P(S) \Rightarrow P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

- ✓ احتمال حدوث مكملة A **أو** مكملة B؛ أي $(\overline{A} \cup \overline{B})$، يساوي احتمال مكملة A وB. أي؛

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)...........*$$

- ✓ احتمال حدوث مكملة A **و** مكملة B؛ أي $(\overline{A} \cap \overline{B})$، يساوي احتمال مكملة A أوB. أي؛

[1] $$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B).......*$$

- ✓ إذا كان A وB حادثين، إن احتمال حدوث A وعدم حدوث B $(\overline{B})$ يساوي احتمال حدوث A مطروحا منه احتمال حدوث A وB. $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

ملاحظة هامة: في حالة وجود ثلاث حوادث C, B, A وكان $P(A) \neq 0$ و $P(A \cap B) \neq 0$ فإن:

$$P(A \cap B \cap C)) = P(A).P(B / A).P(C / A \cap B)$$

3.الاحتمال الشرطي (Conditional Probability)

إذا كان لدينا الحادثين A وB وكان $P(B) \neq 0$ فإن الاحتمال الشرطي للحادث A بشرط وقوع الحادث B يحسب كما يلي:

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

يعرف $P(A/B)$ بالاحتمال الشرطي ويقرأ "**احتمال وقوع A بشرط وقوع (أو معلومية) B**".

كما يمكن حساب احتمال B بشرط تحقق A كما يلي:

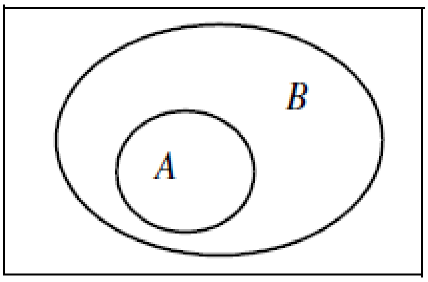
---

[1] نسمي هذين القاعدتين بـ Demorgen Rules.

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

حالات خاصة:

- إذا كان الحادث A مثلا محتواة في الحادث B كما يبين مخطط Venn:

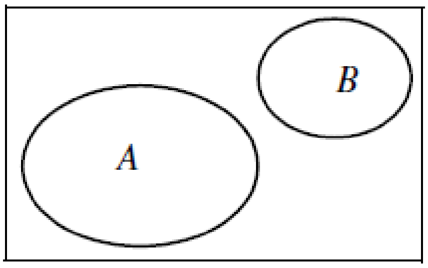


إذا كان $(A\subset B)$ فإن $P(A\cap B)=P(A)$ فإن:

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1$$

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}$$

- لما يكون $(A\cap B)=\varnothing$ كما يوضحه مخطط Venn:



$(A\cap B)=\varnothing$

$P(A\cap B)=P(\varnothing)=0$

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0}{P(B)}=0$$

- **لما يكون الحدثان A, B مستقلان فإن:**

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A).P(B)}{P(B)}=P(A)$$

مثال: نرمي قطعتي نرد مرة واحدة، نسمي الحادث A مجموع الوجهين الظاهريين يساوي 6. الحادث B إحدى الوجهين الظاهريين هو 2.

- ✓ أوجد P(A)، P(B).
- ✓ أوجد P(B/A)

الحل: رمي زهرتين نرد، إذن الحالات الكلية تساوي 36.

$$A=\{(2.4),(4.2),(1.5),(5.1),(3.3)\}\rightarrow n(A)=5$$

$$B=\{(1.2),(2.1),(2.2),(2.3),(2.4),(2.5),(2.6),(3.2),(4.2),(5.2),(6.2)\}\rightarrow n(B)=11$$

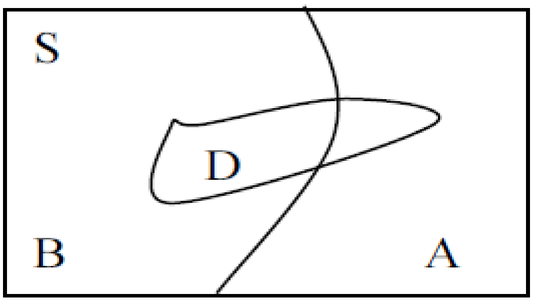
إذن:

$$P(A)=\frac{5}{36},........P(B)=\frac{11}{36}$$

$$A\cap B=\{(2.4),(4.2)\ \}\rightarrow n(A\cap B)=2$$
$$P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{2/36}{5/36}=\frac{2}{5}$$

4.نظرية بايز (Bayes' theorem)

إذا كان A وB حادثين شاملين ومتنافيين في الفراغ S وكان الحادث D أي حادث في نفس الفراغ، حيث $P(D)\neq 0$ كما يوضحه الشكل التالي.



لدينا:

$$S=A\cup B..................1$$
$$D\cap S=D.................2\rightarrow$$
$$D=D\cap(A\cup B)$$
$$D=(D\cap A)\cup(D\cap B)$$
$$P(D)=P(D\cap A)+P(D\cap B)$$
$$P(D)=P(D/A).P(A)+P(D/B).P(B)$$

الآن نقوم بحساب كل من P(A/D) وP(B/D)

$$P(A/D)=\frac{P(D\cap A)}{P(D)}=\frac{P(D/A).P(A)}{P(D/A).P(A)+P(D/B).P(B)}$$
$$P(B/D)=\frac{P(D\cap B)}{P(D)}=\frac{P(D/B).P(B)}{P(D/A).P(A)+P(D/B).P(B)}$$

وهي نظرية بايز.

مثال: مصنع انتاجي يحتوي على ثلاث آلات (M_3, M_2, M_1) تنتج ما نسبته 35%، 40% و25% على الترتيب من الإنتاج الكلي للمصنع علما بأن نسبة الإنتاج التالف من انتاج الآلات هو 6%، 3% و8% على الترتيب. سحبت وحدة انتاج من المصنع عشوائيا فكانت تالفة.

والمطلوب:

- ✓ احسب احتمال أن تكون الوحدة المسحوبة تالفة؟
- ✓ احسب احتمال أن تكون من انتاج الآلة (M1)؟
- ✓ احسب احتمال أن تكون من انتاج الآلة (M2)؟
- ✓ احسب احتمال أن تكون من انتاج الآلة (M3)؟

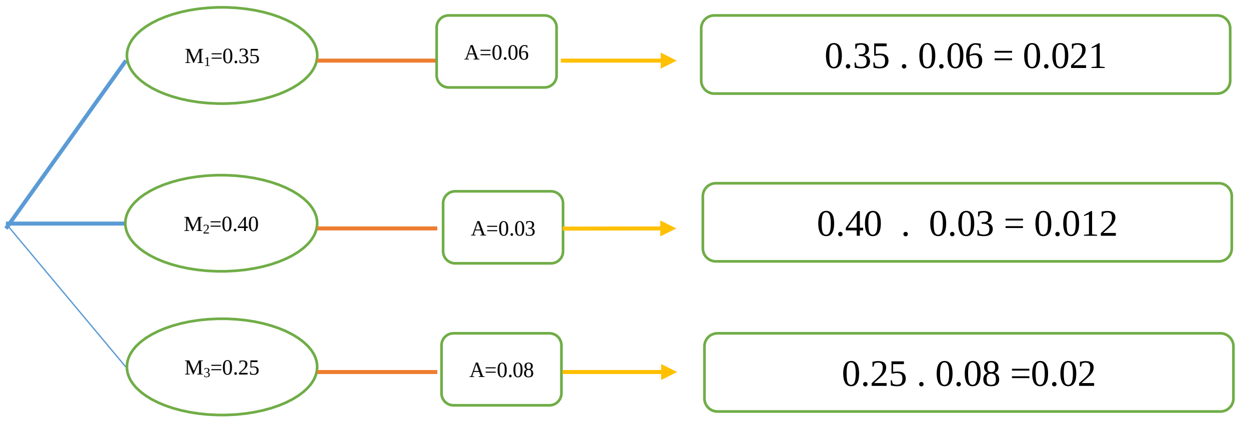
الحل:

لدينا : انتاج تالف A

لدينا انتاج الآلات كما يلي:

P(M1)=0.35, P(M2)=0.40, P(M3)=0.25

سحبنا وحدة انتاج فكانت تالفة (A)؛ أي P(A) محققة.



1. نحسب الآن احتمال أن الوحدة تالفة؛ أي P(A): يكون تالف إما من M_1 أو من M_2 أو من M_3

$$P(A) = P(M_1).P(A/M_1) + P(M_2).P(A/M_2) + P(M_3).P(A/M_3)$$
$$P(A) = (0.35\times 0.06) + (0.40\times 0.03) + (0.25\times 0.08)$$
$$P(A) = 0.021 + 0.012 + 0.02 = 0.053$$

2. احتمال أن تكون الوحدة التالفة من M_1. رياضيا نعبر عن هذا الاحتمال بما يلي: $P(M_1/A)$

$$P(M_1/A)=\frac{P(M_1\cap A)}{P(A)}=\frac{P(M_1).P(A/M_1)}{P(A)}$$

$$P(M_1/A)=\frac{0.35\times 0.06}{0.053}\simeq 0.40$$

3.احتمال أن تكون الوحدة التالفة منM_2. رياضيا نعبر عن هذا الاحتمال بما يلي: $P(M_2/A)$

$$P(M_2/A)=\frac{P(M_2\cap A)}{P(A)}=\frac{P(M_2).P(A/M_2)}{P(A)}$$

$$P(M_2/A)=\frac{0.4\times 0.03}{0.053}\simeq 0.22$$

4.احتمال أن تكون الوحدة التالفة منM_3. رياضيا نعبر عن هذا الاحتمال بما يلي: $P(M_3/A)$

$$P(M_3/A)=\frac{P(M_3\cap A)}{P(A)}=\frac{P(M_3).P(A/M_3)}{P(A)}$$

$$P(M_3/A)=\frac{0.25\times 0.08}{0.053}\simeq 0.38$$

نلاحظ أن مجموع الاحتمالات يساوي 1؛ أي:

$$P(M_1/A)+P(M_2/A)+P(M_3/A)=0.40+0.22+0.38=1$$