المحاضرة 02: الحل البياني

بعد بناء النموذج الرياضي نشرع في حل هذه المسألة بالطرق المذكورة سابقا.

أولا: طريقة الرسم البياني

تتمثل هذه الطريقة في رسم أو تمثيل مختلف القيود في مستوى منسوب لمعلم متعامد ومتجانس انطلاقا من الشكل المعياري للمسألة، ثم إسقاط ورسم معادلات القيود على محوري الفواصل والتراتيب ، في كل مرة نجعل أحد المتغيرين يساوي الصفر لنحدد قيمة المتغير الآخر.

ففي مثالنا السابق وانطلاقا من القيدين التاليين:

بالنسبة للقيد الأول Δ_1:

نفرض أن$(X = 0)$ نعوض هذه القيمة في المتباينة الأولى على النحوالتالي:

$$\boxed{\begin{array}{l} 3(0) + 6Y \leq 2400 \\ \therefore Y \leq \left(\dfrac{2400}{6}\right) \\ \therefore Y \leq 400 \qquad Y \in [0; 400] \end{array}}$$

ولما نضع المتغير الآخر معدوم $(\mathrm{Y} = 0)$ فإننا سنتحصل على:

$$\boxed{\begin{array}{l} 3X + 6(0) \leq 2400 \\ \therefore X \leq \left(\dfrac{2400}{3}\right) \\ \therefore X \leq 800 \qquad X \in [0 \quad 800] \end{array}}$$

مما سبق يمكننا القول أن حلول هذه المتراجحة أو المتباينة هي جميع الثنائيات $(X, Y) \leq$ $(800, 400)$ بيانيا هي النقاط التي تقع على المستقيم Δوما دونه.

اما بالنسبة للقيد الأول Δ_1:

نفرض أن $(X = 0)$ نعوض هذه القيمة في المتراجحة الأولى علىالنحو التالي:

$$2(0) + Y \leq 1000$$
$$\therefore Y \leq 10000 \qquad Y \in [0 \ \ 1000]$$

بينما عندما نضع المتغير الثاني يساوي الصفر $(Y = 0)$ فإنناسنتحصل على:

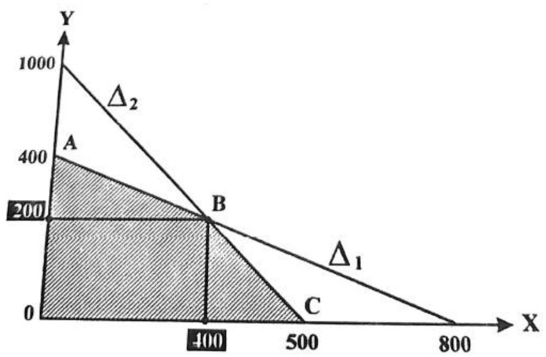
$$2X + 0 \leq 1000$$
$$\therefore X \leq \left(\frac{1000}{2}\right)$$
$$\therefore X \leq 500 \qquad Y \in [0 \quad 500]$$

مما سبق نقول أن حلول هذه المتراجحة هي جميع الثنائيات $(X, Y) \leq (500, 1000)$ وبيانيا هي النقاط التي تقع على المستقيم Δ_2 ومادونه.

مما سبق فإنه يمكن تلخيص حلول جملة المتراجحتين (1) و(2) فيالجدول التالي:

القيــود		
الحلول المشتركة		

ويمكن تمثيل هذه الجلول بيانيا في الشكل الموالي:



الشكل رقم ( ): منطقة الحلول الممكنة

تسمى المساحة المحصورة بين النقاط (C, B, A, O) بمنطقة أو مساحة الحلول الممكنة، حيث أن أي نقطة ضمن هذه المنطقة تعطي حلا للمسألة ، لكنها ليست كلها حلولا مثلى، ولتحديد أي منها حل أمثل نقوم بمقارنة قيمة دالة الهدف عند مختلف نقاط الحدود أو أطراف مساحة الحلول الممكنة.

1- عند النقطة (A) حيث $X = 0$ و $Y = 400$ تكون قيمة دالة الهدف:

وتكون قيمة القيود:

قيد ساعات العمل: $3(0) + 6\,(400) = 2400$

قيد المادة الأولية: $2(0) + 1(400) = 400$

الملاحظ أنه عند هذه النقطة، أي فيما لو تنتج المؤسسة 400 وحدة من النوع الثاني فقط، فإن هذا سيؤدي حتما لاستغلال كامل لساعات العمل ، أما بالنسبة للمادة الأولية فإنها غير مستغلة تماما بل يبقى منها 600 وحدة قياس بإمكان استغلالها في إنتاج كميات إضافية.

2-عند النقطة (B) حيث $X = 400$ و $Y = 200$ تكون قيمة دالة الهدف:

وتكون قيمة القيود:

قيد ساعات العمل: $3(400) + 6\,(200) = 2400$

قيد المادة الأولية: $2(400) + 1(200) = 1000$

الملاحظ أنه عند هذه النقطة تكون كل الموارد المخصصة قد استغلت بالكامل وأن قيمة دالة الهدف أفضل من الحل السابق.

3-عند النقطة (C) حيث $X = 500$ و $Y = 0$ فإن قيمة دالة الهدف هي:

وتكون المواد المستهلكة هي:

بالنسبة لساعات العمل: $3(500) + 6(0) = 1500$ (وتبقى منها 900 ساعة غير مستغلة)

أما المادة الأولية $2(500) + 1(0) = 1000$ (فهي مستغلة تماما)

4-عند النقطة (0) حيث $X = 0$ و $Y = 0$ فإن قيمة دالة الهدف هي:

وتكون قيمة القيود:

قيد ساعات العمل: $3(0) + 6\,(0) = 0$

قيد المادة الأولية: $2(0) + 1(0) = 0$

يسمى الحل عند هذه النقطة بالحل المبدئي أو الحل القاعدي نلجأ إليه للانطلاق في عملية تحسين الحل، ولكن من الناحية الاقتصادية ليس له أي معنى.

يمكن تلخيص نتائج الحل حسب طريقة الرسم البياني في الجدول التالي:

الحلول الممكنة	قيد ساعات العمل	قيد المادة الأولية	قيمة دالة الهدف
النقطة (A)	2400 ساعة عمل مستغلة تمامًا	400 وحدة قياس مستغلة فقط	12000 وحدة نقدية
النقطة (B)	2400 ساعة عمل مستغلة تمامًا	1000 وحدة قياس مستغلة فقط	1400 وحدة نقدية
النقطة (C)	1500 ساعة عمل مستغلة فقط	1000 وحدة قياس مستغلة تماما	10000 وحدة نقدية
النقطة (O)	2400 ساعة عمل غير مستغلة	1000 وحدة قياس غير مستغلة	00 وحدة نقدية

بمقارنة الحلول المختلفة عند النقاط C, B, A, O, يتضح وأن الحل الأمثل يكون عند النقطة $B(400,200)$ حيث يمكن إنتاج 400 وحدة من النوع (A,) و 200 وحدة من النوع (B) وتحقق المؤسسة أقصى ربح وقدره 14000 وحدة نقدية مع الاستغلال الكامل للموارد المتاحة (ساعات العمل والمادة الأولية).

الحالات الخاصة لطريقة الرسم البياني:

1-حالة وجود أكثر من حل أمثل واحد:

في بعض الحالات نتحصل على حلول متعددة للمسألة تعطي قيما متساوية لدالة الهدف وتسمى بالحلول البديلة، هذه الأخيرة تمنح للمؤسسة مجالاً واسعًا للاختيار، وفقا لما تراه مناسبا . أنظر المثال (10-2) والجدول(19-2).

مثال () (مثال حول توازن المستهلك) :

لنفرض أن أحد المستهلكين يبحث عن تحديد أفضل توليفة ممكنة من السلعتين (A, B) في حدود ميزانيته المقدرة بمبلغ 300 وحدة نقدية، على أن لا تتجاوز عدد الوحدات المستهلكة من السلعة الأولى (A,) 08 وحدة، ومن السلعة الثانية (B) 03 وحدات ، فإذا كانت المنفعة الناتجة عن استهلاك الوحدة الواحدة من السلعة (A) هي 20 وحدة قياس أما المنفعة الناتجة عن استهلاك السلعة (B) فهي 40 وحدة قياس منفعة.

المطلوب:

ما هي التوليفة المثلى من السلعتين علما أن سعر الوحدة الواحدة من السلعة A هو 30 وحدة نقدية وسعر الوحدة من السلعةB هو 60 وحدة نقدية؟

حل المثال:

نفرض أن (X) هي عدد الوحدات التي يمكن لهذا الشخص استهلاكها من السلعة (A) وأن (Y) هي عدد الوحدات التي يمكنه استهلاكها من السلعة (B). بناء على هذه الرموز يمكننا صياغة المسألة في النموذج التالي:

دالة المنفعة الكلية: $[MAX]Z = 20X + 40Y$

شرط استهلاك السلعة (A):(1) $\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ $X \leq 8$

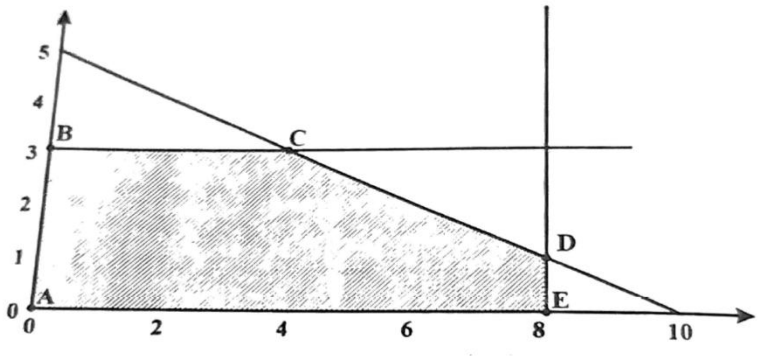
قيد الميزانية:(2) $\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ $30X + 60Y \leq 300$

شرط استهلاك السلعة (B):(3) $\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ $Y \leq 3$

شرط عدم السلبية: (4) $\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ $X \geq 0$

شرط عدم السلبية: (5) $\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ $Y \geq 0$

يمكن تمثيل هذه القيود بيانيا في الشكل التالي:



شكل رقم (): التمثيل البياني لتوازن المستهلك

تمثل المساحة (A, B, C, D, E) مساحة الحلول الممكنة، حيث القيمالمختلفة ملخصة في الجدول التالي:

النقاط	الكمية المستهلكةA	الكمية المستهلكةB	قيمة دالة الهدف	المبلغ المخصص

			(المنفعة الكلية	من الميزانية
	0	0	00	00
	0	3	120	180
	4	3	200	300
	8	1	200	300
	8	0	160	240

نلاحظ وجود خيارين أمام المستهلك، وكل خيار يمثل في حد ذاته حل أمثل ويعطي نفس درجة الإشباع أو المنفعة، ولكن باستهلاك كميات مختلفة من السلعتين، وهذين الاختيارين هما:

الاختيار الأول :عند النقطة (C) حيث يمكن لهذا الشخص استهلاك أربع وحدات من السلعة (A) وثلاث وحدات من السلعة (B) ويحقق بذلك أقصى منفعة كلية قدرها 200 وحدة منفعة في حدودالميزانية المخصصة والمقدرة بـ 300 وحدة نقدية.

أي أن: $X = 4 \quad , \quad Y = 300 \quad , \quad Z = 200$

الاختيار الثاني : أما هذا الاختيار فهو يتضح عند النقطة (D) حيث يمكنه استهلاك ثماني وحدات من السلعة(A) مقابل وحدة واحدةفقط من السلعة (B)، ويحقق كذلك أقصى منفعة كلية قدرها أيضا 200 وحدة منفعة وفي نفس الوقت استهلك كامل المبلغ المخصص أو الميزانية.

أي أن:$X = 8 \quad , \quad Y = 1 \quad , \quad Z = 200$

2) حالة القيد الزائد عن الحاجة:

في مثل هذه الحالة فإن أحد القيود الذي يشكل المسألة يعتبر زائد عن الحاجة، أي أنه لا يساهم في تحديد نقطة الحل الأمثل، إذ أن المستقيم الممثل لمعادلة هذا القيد يكون بعيدا عن منطقة الحلول الممكنة ولا يؤثر بأي حالعلى الحلول

مثال ():لنأخذ المثال رقم (1) ولكن مع افتراض أن هذه المؤسسة لا يمكنها أن تبيع أكثر من 1200 وحدة من النوع (B).

المطلوب: صياغة المشكلة في نموذج مسألة برمجة خطية.

. تحديد التشكيلة الإنتاجية المثلى من النوعين لتحقيق أقصى الأرباح. (باستخدام طريقة الرسم البياني).

حل المثال:

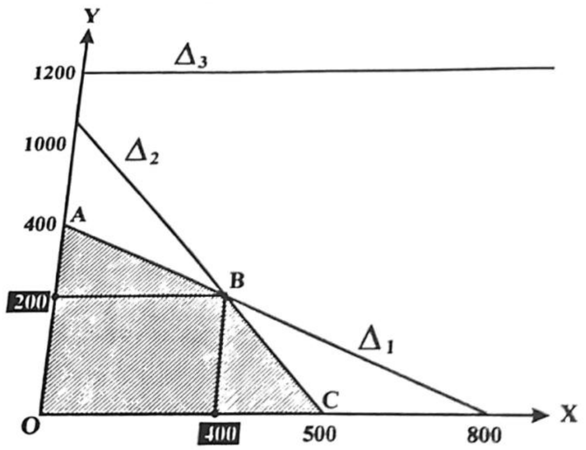
على أساس هذه التغيرات في المسألة، فإن نموذج البرمجة الخطيةسيكون كالتالي:

$$[Max]Z = 20X + 30Y$$

$$3X + 6Y \leq 2400 \dots\dots\dots (1)$$

$$2X + Y \leq 1000 \dots\dots\dots (2)$$

يمكن تمثيل هذه القيود في الشكل البياني التالي:



شكل رقم (): التمثيل البياني للقيد الزائد عن الحاجة

يتضح من الرسم البياني السابق وجود ثلاثة أنواع من القيود وهي:

1. القيود المشكلة للمسألة والمتمثلة بيانيا في المستقيمات $(\Delta_1, \ \Delta_2 \ , \Delta_3)$
2. القيود الأساسية المحددة لنقطة الحل الأمثل والمتمثلة في المستقيمين $(\Delta_1, \ \Delta_2)$.
3. القيود الزائدة عن الحاجة والمتمثلة في المستقيم (Δ_3) .

وعلى هذا الأساس وبناء على النتائج المتوصل إليها يمكننا القول أن الحل الأمثل لهذا النموذج هو نفسه الذي تم الوصول إليه سابقا (حل المثال (2-1) بحيث لم يحدث أي تغيير على أمثلية الحل على الرغم من التغيير الذي حدث في المسألة، ويعود ذلك لأن القيد المتعلق بتسويق النوع الثاني لا يساهم في رسم وتحديد منطقة الحلول، وبالتالي فهو قيدٌ زائد عن الحاجة، لأن القيدين الآخرين يلغيان تأثير هذا القيد.

3) حالة عدم وجود حلول على الإطلاق:

قد يحدث أن لا نتمكن أصلاً من تحديد منطقة الحلول المشتركة وهذايعود لتضارب في القيود والمثال التالي يبين ذلك.

مثال (4−2) (مثال عن الاستثمار):

يريد أحد المقاولين شراء نوعين من الآلات (A, B) تعطي الآلة الواحدة من النوع الأول إيراد قدره 120 وحدة نقدية، أما إيراد الآلة الواحدة من النوع الثاني 100 وحدة نقدية . إن الميزانية التي خصصها هذا المقاول ومقدارها 1200 نقدية لا تسمح بشراء أكثر من خمس آلات من النوعين معا، لأن تكلفة شراء الآلة الواحدة من النوع الأول هي 400 وحدة نقدية، بينما تكلفة شراء الآلة من النوع الثاني 300 وحدة نقدية.

المطلوب: تحديد عدد الآلات من كل نوع A, Bبحيث يتمكن هذا المقاول منتعظيم إيراداته ؟.

حل المثال:

لنفرض أن X هي عدد الآلات التي يمكن شرا ؤها من النوع الأول A وأنYهي عدد الآلات التي يمكن شراؤها من النوع الثانيB.

وبالتالي فإن نموذج المسألة كالتالي:

دالة الهدف تعظيمالإيرادات: $[MAX]Z = 120X + 100Y$

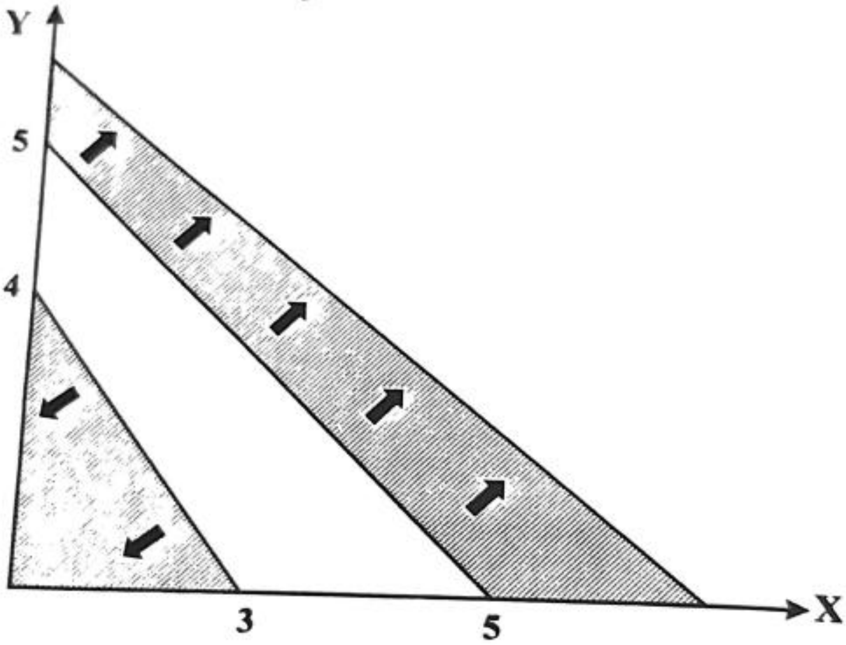
قيد عدد الآلات التي يمكن شراؤها: $X + Y \leq 5$

قيد الميزانية: $40X + 30Y \geq 120$

قيد عدم السلبيۃ: $X \geq 0$

قيد عدم السلبۃ: $Y \geq 0$

يمكن تلخيصحل المسألة في الشكل التالي:



شكل رقم ( ): التمثيل البياني لحالة عدم وجود الحل

يتضح من خلال هذا الشكل أنه لا توجد منطقة الحلول المشتركة لأنه في هذه الحالة القيود متضاربة، وإذا حدث وأن وقع متخذ القرار في مثل هذه الحالة فعليه إعادة النظر في صياغة النموذج صياغة صحيحة، كاقتراح تخصيص موارد أخرى، أو إعادة النظر في القيود السابقة.