المركز الجامعي عبد الحفيظ بوالصوف ميلة

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

السنة الأولى ماستر : اقتصاد نقدي و مالي

المحاضرة الثانية : الانحدار الخطي البسيط (الجزء الثاني)

من إعداد الأستاذ : لفيلف عبد الحق

أستاذ بالمركز الجامعي ميلة

دكتوراه في العلوم المالية والمصرفية

السنة الجامعية 2023 –2024

خصائص مقدرات OLS

المقدرات $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ هي متغيرات عشوائية، تحسب بدلالة كل من المتغير التابع Y_t والمتغير المستقل X_t ، وتأخذ قيما حقيقية في العينة بعد تعويض Y_t و X_t بقيمها الحقيقية، حيث تعتبر المعلمات دالة خطية للمتغير التابع Y_t والمتغير المستقل X_t ، والتي تعتبر أول خاصية من خصائص مقدرات طريقة المربعات الصغرى العادية، بالإضافة إلى خصائص أخرى سنوجزها فيما يلي:

1- خاصية عدم التحيز (Unbiased):

يقصد بالتحيز الفرق الموجود بين مقدر معين وتوقعه الرياضي (أمله الرياضي)، فإذا كان هذا الفرق مختلفا عن الصفر نقول عن ذلك المقدر بأنه مقدر متحيز، وإذا كان هذا الفرق معدوما فإن هذا المقدر مقدر غير متحيز. فيكون $\hat{\theta}$ مقدرا غير متحيز لـ θ إذا حقق الشرط التالي: $E(\hat{\theta}) = \theta$.

<u>مثال :</u> **تخيل أنك تحاول تخمين وزن حقيبة مليئة بالكتب دون استخدام ميزان.** لديك طريقة خاصة بك للتخمين تعتمد على النظر إلى حجم الحقيبة وعدد الكتب التي يمكنك رؤيتها من الخارج. إذا كانت طريقتك في التخمين جيدة بما فيه الكفاية لدرجة أنه، على المدى الطويل، متوسط تخميناتك يساوي الوزن الحقيقي للحقائب التي تخمنها، فإن طريقتك تعتبر "غير متحيزة". بمعنى آخر، **أنت لا تميل دائمًا إلى التخمين بأن الوزن أقل أو أكثر من الو اقع**.

في الانحدار الخطي البسيط، نستخدم معادلة لتقدير علاقة بين شيئين، **مثل الوقت الذي تدرسه** والدرجات التي **تحصل عليها.** خاصية عدم التحيز تعني أنه، في المتوسط، التقديرات التي نحصل عليها من هذه المعادلة للعلاقة بين الدراسة والدرجات ستكون دقيقة - لا تميل إلى التقليل أو المبالغة في تأثير ساعات الدراسة على الدرجات.

بشكل رياضي، لمقدر ما ليكون غير متحيز، يجب أن يكون الفرق بين قيمته المتوقعة (أمله الرياضي) والقيمة الحقيقية للمعلمة التي يحاول تقديرها مساوياً لصفر. بكلمات أخرى، إذا كانت التقديرات التي نحصل عليها من استخدام هذه المعادلة، بمرور الوقت، تميل إلى الاقتراب من القيم الحقيقية التي نحاول قياسها، فإن **هذا يعني أن مقدرنا غير متحيز**.

بنفس التعريف نقول أن مقدرات طريقة المربعات الصغرى العادية $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ هي مقدرات غير متحيزة إذا حققت الشرطين التاليين:

$$E(\hat{\alpha}) = \alpha \qquad \text{and} \qquad E(\hat{\beta}) = \beta$$

1-1- بالنسبة لـــ: $\hat{\beta}$:

$$E(\hat{\beta}) = E\left[\frac{\sum(Y_t - \overline{Y})(X_t - \overline{X})}{\sum(X_t - \overline{X})^2}\right]$$

نضع: $\sum(X_t - \overline{X}) = \sum x_t$

ومنه:

$$
\begin{aligned}
E(\hat{\beta}) &= E\left[\frac{\sum(Y_t-\overline{Y})\cdot x_t}{\sum x_t^2}\right] = E\left[\frac{\sum x_t Y_t - \overline{Y}\sum x_t}{\sum x_t^2}\right] \\
&= E\left[\frac{\sum x_t\cdot(\alpha+\beta\cdot X_t+\varepsilon_t)}{\sum x_t^2}\right] = E\left[\frac{\alpha\sum x_t+\beta\sum x_t\cdot X_t+\sum x_t\varepsilon_t}{\sum x_t^2}\right] \\
&= E\left[\frac{\beta\sum x_t^2+\sum x_t\varepsilon_t}{\sum x_t^2}\right] \\
&= \beta + E\left[\frac{\sum x_t\varepsilon_t}{\sum x_t^2}\right] = \beta + \left[\frac{\sum x_t E(\varepsilon_t)}{\sum x_t^2}\right]
\end{aligned}
$$

ومنه: $E(\hat{\beta})=\beta$ ، إذن $\hat{\beta}$ مقدر غير متحيز لـ: β

2-1- بالنسبة لـــ: $\hat{\alpha}$

$$E(\hat{\alpha}) = E(\overline{Y}-\hat{\beta}\cdot\overline{X})$$

لدينا: $\overline{Y}=\alpha+\beta\cdot\overline{X}+\overline{\varepsilon}$

ومنه:

$$
\begin{aligned}
E(\hat{\alpha}) &= E(\alpha+\beta\cdot\overline{X}+\overline{\varepsilon}-\hat{\beta}\cdot\overline{X}) \\
&= E(\alpha-(\hat{\beta}-\beta)\cdot\overline{X}+\overline{\varepsilon}) \\
&= \alpha - E(\hat{\beta}-\beta)\cdot\overline{X}+E(\overline{\varepsilon}) \\
&= \alpha
\end{aligned}
$$

إذن: $E(\hat{\alpha})=\alpha$ ، ومنه: $\hat{\alpha}$ مقدر غير متحيز لـ: α

2- أفضل مقدرات خطية غير متحيزة BEST LINEAR UNBIASED ESTIMATORS 'BLUE' :

تنطلق هذه الفكرة من نظرية GAUSS-MARKOV والتي تقول أنه من بين المقدرات الخطية غير المتحيزة، تكون مقدرتا طريقة المربعات الصغرى العادية $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ أفضل مقدرتين خطيتين وغير متحيزتين، حيث أن لها أصغر تباين ممكن مقارنة مع بقية المقدرات الخطية وغير المتحيزة الأخرى[1]. وتتضمن هذه النظرية خاصية أقل تباين للمقدرات (MINIMAL VARIANCE)، للتأكد من أن الأخطاء في نموذج الانحدار البسيط تلبي الشروط التي تضمن صحة نظرية جاوس-ماركوف، يمكننا إجراء عدة اختبارات وتحليلات:

1. **توزيع الأخطاء الطبيعي:(NORMALITY OF RESIDUALS)**

- يمكن استخدام اختبار شابيرو-ويلك أو اختبار كولموجوروف-سميرنوف للتحقق من الطبيعية.
- يمكن أيضًا النظر إلى الرسم البياني للأخطاء (HISTOGRAM OF RESIDUALS) أو الرسم البياني (STEM-AND-LEAF PLOT) لتقييم ما إذا كانت تتبع التوزيع الطبيعي.

[1] - شيخي محمد، طرق الاقتصاد القياسي، محاضرات وتطبيقات، الطبعة الأولى، دار الحامد للنشر والتوزيع، عمان، 2011، ص 25.

2. **استقلالية الأخطاء:**(Independence of Residuals)

- يمكن استخدام اختبار دوربين-واتسون للتحقق من عدم وجود الارتباط الذاتي (Auto-correlation) في الأخطاء، والذي يعني أن الأخطاء في ملاحظة ما لا تعتمد على الأخطاء في الملاحظات السابقة.

3. **ثبات التباين:**(Homoscedasticity)

- يمكن النظر إلى الرسم البياني للأخطاء مقابل القيم المتوقعة (Plot of Residuals vs. Fitted Values) لرؤية ما إذا كانت الأخطاء تبدو ذات تباين متساوٍ عبر جميع القيم المتوقعة.
- يمكن استخدام اختبار بريش-باجان أو اختبار وايت للتحقق من ثبات التباين.

إذا تبين أن الأخطاء لا تلبي هذه الشروط، قد يتعين على الباحث تعديل النموذج أو استخدام طرق أخرى للتحليل. على سبيل المثال، إذا كان هناك تغير في التباين، قد يحتاج الباحث إلى استخدام تقنيات مثل تحويل البيانات أو الانحدار الموزون للتعامل مع هذه المشكلة.

ويمكن إثبات هذه الخاصية حسابيا بعد ايجاد تباين مقدرات طريقة المربعات الصغرى العادية كما يلي:

1-2- تباين $\hat{\beta}$:

$$\begin{aligned}
V(\hat{\beta}) &= E(\hat{\beta} - E(\hat{\beta}))^2 = E(\hat{\beta} - \beta)^2 \\
&= E\left[\beta + \frac{\sum x_t \varepsilon_t}{\left[\sum x_t^2\right]^2} - \beta\right]^2 = E\left[\frac{\sum x_t \varepsilon_t}{\left[\sum x_t^2\right]^2}\right]^2 \\
&= E\left[\frac{\left[\sum x_t \varepsilon_t\right]^2}{\left[\sum x_t^2\right]^2}\right] = E\left[\frac{\sum x_t^2 \varepsilon_t^2 + 2\sum\sum x_i \varepsilon_i x_j \varepsilon_j}{\left[\sum x_t^2\right]^2}\right] \\
&= \left[\frac{\sum x_t^2 \cdot E(\varepsilon_t^2)}{\left[\sum x_t^2\right]^2}\right] = \frac{\delta_\varepsilon^2 \sum x_t^2}{\left[\sum x_t^2\right]^2}
\end{aligned}$$

ومنه:

$$V(\hat{\beta}) = \delta_\varepsilon^2 \left[1 \big/ \sum x_t^2 \right]$$

2-2- تباين $\hat{\alpha}$:

$$
\begin{aligned}
V(\hat{\alpha}) &= E(\hat{\alpha}-E(\hat{\alpha}))^2 = E(\hat{\alpha}-\alpha)^2 \\
&= E\left[\alpha - \left[\hat{\beta}-\beta\right]\overline{X} + \overline{\varepsilon} - \alpha\right]^2 = E\left[-\left[\hat{\beta}-\beta\right]\overline{X} + \overline{\varepsilon}\right]^2 \\
&= E\left[\left[\hat{\beta}-\beta\right]^2 \overline{X}^2 + \overline{\varepsilon}^2 - 2\overline{X}\overline{\varepsilon}\left[\hat{\beta}-\beta\right]\right] \\
&= \overline{X}^2 \cdot E\left[\hat{\beta}-\beta\right]^2 + E\left[\overline{\varepsilon}^2\right] - 2\overline{X} \cdot E\left[\overline{\varepsilon}\right] \cdot E\left[\hat{\beta}-\beta\right] \\
&= \overline{X}^2\left[\frac{\delta_\varepsilon^2}{\sum x_t^2}\right] + \frac{\delta_\varepsilon^2}{n} = \delta_\varepsilon^2\left[\frac{\overline{X}^2}{\sum x_t^2} + \frac{1}{n}\right]
\end{aligned}
$$

ومنه:

$$V(\hat{\alpha}) = \delta_\varepsilon^2\left[\frac{\overline{X}^2}{\sum x_t^2} + \frac{1}{n}\right]$$

1- تقدير تباين المتغير العشوائي ε_t:

من خلال النتائج السابقة يتضح لنا أنه يمكننا تقدير كل من α و β، إلا أنه لا يمكننا إيجاد تباين كل مقدر، لأنه بدلالة تباين المتغير العشوائي المجهول.

استنتاج المقدر غير المتحيز لـ: δ_ε^2 كمايلي:

$$\hat{\delta}_\varepsilon^2 = \frac{\sum e_t^2}{n-2}$$

ومنه يكون التباين المقدر لـ: $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ كمايلي:

$$
\begin{aligned}
\hat{V}(\hat{\alpha}) &= \hat{\delta}_{\hat{\alpha}}^2 = \hat{\delta}_\varepsilon^2\left[\frac{\overline{X}^2}{\sum x_t^2} + \frac{1}{n}\right] \\
\hat{V}(\hat{\beta}) &= \hat{\delta}_{\hat{\beta}}^2 = \hat{\delta}_\varepsilon^2\left[1 / \sum x_t^2\right]
\end{aligned}
$$

مثال: من المثال السابق قدر تباين المتغير العشوائي **ε_t** ، ثم استنتج التباين المقدر للمقدرات.

	e_t	e_t^2
	3.19	10.23
	-3.53	12.48
	1.73	3.00
	-2.26	5.13
	-4.99	24.99
	0.26	0.07
	3.00	9.00
	-2.46	6.08
	4.26	18.20
	0.80	0.64
$\sum$	**0**	**89.86**

2- بناء مجالات ثقة لمعلمات النموذج:

بعد تحديد توزيع كل من المقدرات $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$، سنعمل على تكوين مجالات ثقة تنتمي إليها معلمات النموذج، وهذا عند مستوى معنوية معين، حيث احتمال أن تنتمي معلمة النموذج إلى مجال الثقة يساوي الواحد مطروحا منه مستوى المعنوية.

تخيل أنك في فصل مدرسي ولديك سلة مليئة بالكرات، بعضها أحمر والبعض الآخر أزرق. تقول لصديقك أنك تعتقد أن معظم الكرات في السلة حمراء. صديقك يشك في ذلك ويريد دليلًا. لذلك، تقوم بغمض عينيك واختيار 10 كرات عشوائيًا للتحقق من لونها.

مستوى المعنوية **α** هو مثل حد الخطأ الذي أنت مستعد لقبوله في اختبارك هذا. إذا قلت إن **α** يساوي 5%، فهذا يعني أنك تقبل أن هناك فرصة بنسبة 5% أنك قد تصل إلى استنتاج خاطئ من خلال عينتك.

في مثال الكرات:

- الفرضية الصفرية: أنت تفترض أولاً أنه لا يوجد فرق، وأن الكرات الحمراء والزرقاء موجودة بنفس النسبة.
- اختيار الكرات: تختار 10 كرات عشوائيًا، وتجد أن 8 منها حمراء و2 زرقاء.

الآن، أمامك خياران:

1. إذا كنت تأخذ مستوى المعنوية 5% بجدية، فسوف تقول "هناك دليل كافٍ أن هناك المزيد من الكرات الحمراء" إذا كانت النتيجة التي حصلت عليها (8 حمراء و2 زرقاء) لا تحدث عادة إلا في 5% من الوقت أو أقل عندما تكون الكرات الحمراء والزرقاء متساوية في السلة.
2. إذا كانت نتيجة اختيارك للكرات يمكن أن تحدث بأكثر من 5% من الوقت (فلنقل 10% من الوقت) في سلة بها توزيع متساوٍ، فلن تكون النتيجة كافية لإثبات أن هناك المزيد من الكرات الحمراء. لأنك قد تكون حصلت على هذه النتيجة بالصدفة.

إذاً، مستوى المعنوية α يساوي 5% هو حد لقبول الخطأ في استنتاجاتك، وهو يُستخدم لتحديد متى يجب أن تعتبر نتائجك مهمة بما فيه الكفاية لتكون مقتنعًا بأن **تجربتك تُظهر نتيجة حقيقية وليست فقط بسبب الصدفة**.

<u>مثال:</u> من المثال السابق يمكن بناء مجالات ثقة لمعلمات النموذج عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$ كما يلي:

- بالنسبة للمعلمة α:

$$P\left(\alpha \in \left[\hat{\alpha} - St_{n-2}^{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\hat{\delta}_{\hat{\alpha}}^2} \quad . \quad \hat{\alpha} + St_{n-2}^{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\hat{\delta}_{\hat{\alpha}}^2}\right]\right) = 1 - \alpha$$
$$\Rightarrow P\left(\alpha \in \left[21.86 - St_{n-2}^{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{19.47} \quad . \quad 21.86 + St_{n-2}^{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{19.47}\right]\right) = 1 - 0.05 = 0.95$$

من جدول STUDENT نجد أن القيمة المجدولة عند درجة حرية (10-2=8) وعند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$ هي:

$$St_{n-2}^{\frac{\alpha}{2}} = St_{10-2}^{\frac{5}{2}} = St_8^{2.5\%} = 2.306$$

وبالتالي يكون مجال الثقة للمعلمة α كما يلي:

$$P\left(\alpha \in \left[21.86 - 2.306 \cdot \sqrt{19.47} \quad . \quad 21.86 + 2.306 \cdot \sqrt{19.47}\right]\right) = 0.95$$
$$P\left(\alpha \in \left[11.68 \quad . \quad 32.03\right]\right) = 0.95$$

- بالنسبة للمعلمة β:

$$P\left(\beta \in \left[\hat{\beta} - St_{n-2}^{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\hat{\delta}_{\hat{\beta}}^2} \quad . \quad \hat{\beta} + St_{n-2}^{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\hat{\delta}_{\hat{\beta}}^2}\right]\right) = 1 - \alpha$$
$$\Rightarrow P\left(\beta \in \left[4.73 - 2.306 \cdot \sqrt{0.3744} \quad . \quad 4.73 + 2.306 \cdot \sqrt{0.3744}\right]\right) = 0.95$$
$$\Rightarrow P\left(\beta \in \left[3.31 \quad . \quad 6.14\right]\right) = 0.95$$

رابعا: تقييم النموذج الخطي البسيط

يتم تقييم نموذج الانحدار الخطي البسيط باستعمال المعايير التالية:

1- المعايير الاقتصادية:

تتعلق بحجم وإشارة المعلمات المقدرة، لأن النظرية الاقتصادية تضع قيودا مسبقة على حجم وإشارة المعلمات، فإذا ما جاءت هذه المعلمات على عكس ما تقرره النظرية مسبقا فإن هذا يمكن أن يكون مبررا كافيا لرفض هذه المعلمات.

2- المعايير الإحصائية:

تتمثل هذه المعايير فيما يلي:

2-1- تحليل التباين ومعامل التحديد:

تعتبر بواقي التقدير e_t مقياسا لمدى تمثيل النموذج المقدر للنموذج الحقيقي، وهو ما يعرف بجودة التوفيق، فكلما كانت البواقي كبيرة قلت وضعفت جودة التمثيل والعكس صحيح.

لدينا:

$$
\begin{aligned}
& Y_t = \hat{Y}_t + e_t \\
& \Rightarrow Y_t - \overline{Y} = \hat{Y}_t - \overline{Y} + e_t \\
& \Rightarrow (Y_t - \overline{Y})^2 = (\hat{Y}_t - \overline{Y})^2 + 2(\hat{Y}_t - \overline{Y}) \cdot e_t + e_t^2 \\
& \Rightarrow \sum(Y_t - \overline{Y})^2 = \sum(\hat{Y}_t - \overline{Y})^2 + 2\sum(\hat{Y}_t - \overline{Y}) \cdot e_t + \sum e_t^2
\end{aligned}
$$

بالمقابل لدينا: $\sum(\hat{Y}_t - \overline{Y}) \cdot e_t = 0$ ، وبالتالي نجد:

$$\sum(Y_t - \overline{Y})^2 = \sum(\hat{Y}_t - \overline{Y})^2 + \sum e_t^2$$

هذه المعادلة الأخيرة تعرف بمعادلة تحليل التباين، وهي تتكون من ثلاث أجزاء كما يلي:

$\sum(Y_t - \overline{Y})^2$: مجموع مربعات الانحرافات الكلية ((TOTAL SUM OF SQUARES (TSS).

أي تمثل إجمالي التباين في المتغير التابع الذي نحاول شرحه من خلال النموذج

$\sum(\hat{Y}_t - \overline{Y})^2$: مجموع مربعات الانحرافات المفسرة ((EXPLAINED SUM OF SQUARES (ESS).

تمثل مقدار التباين في المتغير التابع الذي يمكن تفسيره بواسطة المتغير المستقل في النموذج. كلما كانت هذه القيمة **كبيرة** بالنسبة لـ TSS كلما كان النموذج فعال في شرح الكثير من التباين في البيانات.

$\sum e_t^2$: مجموع مربعات البواقي ((RESIDUAL SUM OF SQUARES (RSS))

كلما كانت هذه القيمة صغيرة بالنسبة إلى TSS، كلما كان النموذج جيدا في التنبؤ بالقيم.

ومنه يمكن إعادة صياغة معادلة تحليل التباين على النحو التالي:

$$TSS = ESS + RSS$$

انطلاقا من معادلة تحليل التباين يمكن استخلاص مؤشر تقاس به القدرة التفسيرية للنموذج، والمتمثل في ما يعرف بمعامل التحديد، والذي نرمز له بالرمز R^2 ، وهو مؤشر يقيس النسبة المفسرة من التغير الكلي بدلالة خط الانحدار، أي نسبة مجموع مربعات الانحرافات المفسرة إلى مجموع مربعات الانحرافات الكلية، تتراوح قيمته بين الصفر والواحد، أي: $0 \leq R^2 \leq 1$ ، فكلما اقترب R^2 من الواحد، تكون للنموذج قدرة تفسيرية عالية، وكلما اقترب من الصفر، دل ذلك على ضعف القدرة التفسيرية للنموذج. بصيغة رياضية يكتب معامل التحديد كما يلي:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{\sum(\hat{Y}_t - \overline{Y})^2}{\sum(Y_t - \overline{Y})^2}$$

$$\frac{TSS}{TSS} = \frac{ESS}{TSS} + \frac{RSS}{TSS} \Rightarrow 1 = R^2 + \frac{RSS}{TSS} \Rightarrow R^2 = 1 - \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{\sum e_t^2}{\sum(Y_t - \overline{Y})^2}$$

أما جدول تحليل التباين (ANOVA) Analysis Of Variance فيأخذ الشكل التالي:

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط المربعات
المتغير المستقل X_t	$ESS = \sum(\hat{Y}_t - \overline{Y})^2$	1	$\sum(\hat{Y}_t - \overline{Y})^2 / 1$
البواقي e_t	$RSS = \sum e_t^2$	$n-2$	$\sum e_t^2 / n-2$
المجموع	$TSS = \sum(Y_t - \overline{Y})^2$	$n-1$	

مثال: من المثال السابق أوجد معامل التحديد R^2 ، ثم كون جدول ANOVA

2-2- اختبارات المعنوية:

تتمثل هذه الاختبارات فيما يلي:

2-2-1- اختبار Student:

يستعمل هذا الاختبار لدراسة المعنوية الجزئية لمعلمات النموذج عند مستوى معنوية معين، حيث نختبر المعنوية الاحصائية لمعامل الانحدار (β)، والتي تسمح بالحكم على معنوية العلاقة بين المتغير التابع والمتغير المستقل، كما نختبر المعنوية الاحصائية للحد الثابت (α)، والتي تسمح بالحكم على جدوى وجود الحد الثابت في النموذج من عدمها.

- **بالنسبة لـ: β**

يأخذ اختبار Student الشكل التالي:

$$\begin{cases} H_0 : \beta = 0 \\ H_1 : \beta \neq 0 \end{cases}$$

تشير فرضية العدم H_0 إلى **عدم وجود علاقة** ذات دلالة احصائية بين المتغير التابع والمتغير المستقل، بينما تشير الفرضية البديلة H_1 إلى **وجود علاقة** ذات دلالة احصائية.

مما سبق لدينا:

$$\frac{\hat{\beta}-\beta}{\sqrt{\hat{\delta}^2_{\hat{\beta}}}} \to St(n-2)$$

تحت ظل الفرضية $H_0 : \beta \ = 0$ نجد أن $\frac{\hat{\beta}-0}{\sqrt{\hat{\delta}^2_{\hat{\beta}}}}$ تتبع أيضا توزيع STUDENT بدرجة حرية تساوي $(n-2)$، حيث يقوم هذا الاختبار على مقارنة إحصائيةSTUDENT المحسوبة $St_{cal} = \left|\frac{\hat{\beta}}{\sqrt{\hat{\delta}^2_{\hat{\beta}}}}\right|$ مع الإحصائية المجدولة من جدول STUDENT عند درجة حرية $(n-2)$ ومستوى معنوية $\alpha/2$، أي $St_{tab} = St^{\alpha/2}_{n-2}$. (في حالة $(n-2) > 30$ فإن $St_{tab} = 1.96$).

أما قرار الاختبار فيكون كما يلي:

- نرفض الفرضية H_0 إذا كانت $St_{cal} \geq St_{tab}$، و منه $\beta \neq 0$، وبالتالي وجود علاقة ذات دلالة احصائية بين المتغير التابع والمتغير المستقل.
- نقبل الفرضية H_0 إذا كانت $St_{cal} < St_{tab}$، و منه $\beta = 0$، وبالتالي عدم وجود علاقة ذات دلالة احصائية بين المتغير التابع والمتغير المستقل.
- **بالنسبة لـ: α**

يأخذ اختبار STUDENT الشكل التالي:

$$\begin{cases} H_0 : \alpha = 0 \\ H_1 : \alpha \neq 0 \end{cases}$$

تشير فرضية العدم H_0 إلى عدم وجود دلالة احصائية لإدراج الحد الثابت في النموذج ، بينما تشير الفرضية البديلة H_1 إلى أن وجود الحد الثابت في النموذج له دلالة احصائية.

مما سبق لدينا:

$$\frac{\hat{\alpha}-\alpha}{\sqrt{\hat{\delta}^2_{\hat{\alpha}}}} \to St(n-2)$$

تحت ظل الفرضية $H_0 : \alpha = 0$ نجد أن $\frac{\hat{\alpha} - 0}{\sqrt{\hat{\delta}^2_{\hat{\alpha}}}}$ تتبع أيضا توزيع STUDENT بدرجة حرية تساوي $(n-2)$ ، حيث يقوم هذا الاختبار على مقارنة إحصائيةSTUDENT المحسوبة $St_{cal} = \left| \frac{\hat{\alpha}}{\sqrt{\hat{\delta}^2_{\hat{\alpha}}}} \right|$ مع الإحصائية المجدولة من جدول STUDENT عند درجة حرية $(n-2)$ ومستوى معنوية $\alpha/2$ ، أي $St_{tab} = St^{\alpha/2}_{n-2}$.

أما قرار الاختبار فيكون كما يلي:

- نرفض الفرضية H_0 إذا كانت $St_{cal} \geq St_{tab}$ ، و منه $\alpha \neq 0$ ، وبالتالي وجود الحد الثابت في النموذج له دلالة احصائية.
- نقبل الفرضية H_0 إذا كانت $St_{cal} < St_{tab}$ ، و منه $\alpha = 0$ ، وبالتالي عدم وجود دلالة احصائية لإدارج الحد الثابت في النموذج.

<u>**مثال:**</u> من المثال السابق قم بإجراء اختبار STUDENT عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$ كمايلي:

2-2-2- اختبار FISHER:

يوضح لنا هذا الاختبار المعنوية الكلية للنموذج بصورة عامة، و يأخذ الشكل التالي:

$$\begin{cases} H_0 : \alpha = \beta = 0 \\ H_1 : \alpha \neq 0 \quad \vee \quad \beta = 0 \end{cases}$$

نقوم بحساب إحصائية FISHER التي تعطى بالعلاقة التالية:

$$F_{cal} = \frac{R^2 / 2-1}{(1-R^2) / n-2}$$

الإحصائية F_{cal} تتبع توزيع FISHER بدرجة حرية $v_1 = 1$ و $v_2 = n-2$ ، أي $F^{\alpha=5\%}_{(1.n-2)}$.

و يكون قرار الاختبار كمايلي:

- نرفض الفرضية H_0 إذا كانت $F_{cal} \geq F^{\alpha=5\%}_{(1.n-2)}$ ، و منه $\alpha \neq 0$ أو $\beta \neq 0$.
- نرفض الفرضية H_1 إذا كانت $F_{cal} < F^{\alpha=5\%}_{(1.n-2)}$ ، و منه $\alpha = 0$ و $\beta = 0$.

<u>**مثال:**</u> من المثال السابق قم باجراء اختبار FISHER عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$ ثم قم بالتعليق على النتيجة

خامسا: التنبؤ في النموذج الخطي البسيط

بعد تقدير معلمات النموذج الخطي البسيط، يكون في الامكان حساب التنبؤ لأفق معين، فالنموذج المقدر للفترة $t = 1 \ldots n$ يعطى بالعلاقة التالية:

$$Y_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_t + e_t$$

بافتراض أن المتغير المستقل X يأخذ قيمة معلومة في اللحظة $(n+1)$، أي X_{n+1} ، فإن التنبؤ بقيمة المتغير التابع Y في اللحظة $n+1$ يكون كما يلي:

$$\hat{Y}_{n+1} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_{n+1}$$

مثال: من المثال السابق أوجد عائد المبيعات عند تخصيص انفاق على الاعلانات بمقدار 12 مليون دج سنة 2019

السلسلة الأولى حول الانحدار الخطّي البسيط

التمرين الأول:

مثال:

ترغب إحدى الشركات في تحديد العلاقة بين إنفاقها على الدعاية والاعلانات وعوائد المبيعات، كلاهما بالمليون دينار جزائري، فإذا كانت لدينا البيانات التالية عن تطور هاذين المتغيرين من 2009 إلى 2018 كمايلي:

السنة	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
الاعلانات	4	5	6	6	7	8	7	9	8	10
المبيعات	44	42	52	48	50	60	58	62	64	70

المطلوب:

- مثل بيانيا بيانات الجدول بسحابة النقاط، ماذا تستنتج؟
- قدر النموذج الخطي البسيط الذي يقيس أثر الانفاق على الاعلانات على عوائد المبيعات في هذه الشركة، وفسر النتائج.
- حساب القيم المقدرة $\hat{Y}_t$ واستنتاج بواقي التقدير e_t.

- قدّر تباين المتغير العشوائي، ثم استنتج التباين المقدر للمقدرات.
- أوجد معامل التحديد R^2، ثم كون جدول ANOVA
- قم باجراء اختبار STUDENT عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$ ثم قم بالتعليق على النتائج
- قم باجراء اختبار FISHER عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$ ثم قم بالتعليق على النتائج
- أوجد عائد المبيعات عند تخصيص انفاق على الاعلانات بمقدار 12 مليون دج سنة 2019

التمرين الثاني:

لتكن لديك المعطيات التالية والمتعلقة بدخل أحد العائلات واستهلاكها الشهري من جانفي **2019** إلى ديسمبر **2019**.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Y_t	1000	1100	1150	1050	1100	1180	1200	1250	1190	1100	1200	1200
C_t	800	850	850	770	820	840	880	860	875	795	850	840

حيث: Y_t الدخل . C_t الاستهلاك

المطلوب:

1- قدر معلمات معادلة الاستهلاك التالية باستعمال طريقة المربعات الصغرى العادية: $C_t = c_0 + \beta \cdot Y_t + \varepsilon_t$.

2- فسر نتائج التقدير اقتصاديا.

3- أوجد مجموع مربعات البواقي $\sum e_t^2$.

4- أحسب معامل التحديد R^2 وفسر النتيجة.

-5 اختبر الفرضيات التالية: $H_1: \ \beta \neq 1/2$ $\qquad H_0: \ \beta = 1/2$

-6 تنبأ بالاستهلاك الشهري لهذه العائلة في شهري جانفي وفيفري 2020، إذا علمت أن دخلها الشهري يساوي 1250 و1300 على التوالي.

التمرين الثالث:

انــطلاقا من المعطيات الخاصة بمخصصات الإشهار والأرباح الشهرية لإحدى المؤسسات الاقتصادية، قام باحث اقتصادي بتقدير العلاقة الخطية التالية:

$$Y_t = \alpha + \beta \cdot X_t + \varepsilon_t$$

حيث: Y_t : الأرباح الشهرية للمؤسسة للفترة t . X_t : مخصص الإشهار للفترة t . $t = 1 \ldots 24$

باستعمال طريقة المربعات الصغرى العادية توصل الباحث للنتائج التالية:

$$\hat{Y}_t = 155.29 + 0.2241 \cdot X_t$$
$$(31.455) \quad (0.0255)$$
$$n = 24 \qquad \sum(Y_t - \overline{Y})^2 = 35665.95 \qquad \sum(X_t - \overline{X})^2 = 552597.50$$

حيث: (.) : الانحراف المعياري المقدر للمعلمات المقدرة.

المطلوب:

-1 أحسب معامل التحديد R^2 وفسر النتيجة.

-2 اختبر معنوية المعلمات المقدرة عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$.

-3 باستعمال اختبار فيشر اختبر معنوية النموذج ككل.

-4 باستعمال مجال الثقة اختبر الفرضية التالية عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$:

$$H_0: \ \beta = 1/4 \qquad H_1: \ \beta \neq 1/4$$

التمرين الرابع:

قام باحث بتقدير نموذج اقتصادي يؤخذ الإنتاج الشهري كمتغير تابع وتكاليف الإنتاج كمتغير مستقل، فحصل على النتائج التالية:

$$\hat{Y}_t = 4250 \quad + \quad 1 \cdot X_t$$
$$(65.02) \qquad (0.1)$$
$$n = 52$$

حيث: (.) الانحراف المعياري المقدر للمعلمات المقدرة.

المطلوب:

-1 برهن أن $R^2 = 2/3$.

-2 اختبر المعنوية الكلية للنموذج عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$

Table 01: **Critical values of the St-distribution**

ν \ α	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
1	3.078	6.314	12.076	31.821	63.657	318.310	636.620
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.326	31.598
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.213	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.767
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

Table 02: Critical values of the F-distribution

	$\nu_1 = 1$		$\nu_1 = 2$		$\nu_1 = 3$		$\nu_1 = 4$		$\nu_1 = 5$	
ν_2	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 1\%$	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 1\%$	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 1\%$	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 1\%$	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 1\%$
1	161.4	4052.00	199.5	4999.00	213.7	3403.00	224.6	5625.00	230.2	5764.00
2	18.51	98.49	19.00	99.00	19.16	99.17	19.25	99.25	19.30	99.30
3	10.13	34.12	9.55	30.81	9.28	29.46	9.12	28.71	9.01	28.24
4	7.71	21.20	6.94	18.00	6.59	16.69	6.39	13.98	6.26	13.32
5	6.61	16.26	5.79	13.27	5.41	12.06	5.19	11.39	5.03	10.97
6	3.99	13.74	3.14	10.91	4.76	9.78	4.53	9.13	4.39	8.75
7	3.39	12.23	4.74	9.35	4.33	8.43	4.12	7.85	3.97	7.45
8	3.32	11.26	4.46	8.63	4.07	7.39	3.84	7.01	3.69	6.63
9	5.12	10.56	4.26	8.02	3.86	6.99	3.63	6.42	3.48	6.06
10	4.96	10.04	4.10	7.56	3.71	6.33	3.48	5.99	3.33	5.64
11	4.84	9.65	3.98	7.20	3.59	6.22	3.36	5.67	3.20	5.32
12	4.75	9.33	3.88	6.93	3.49	5.93	3.26	5.41	3.11	5.06
13	4.67	9.07	3.80	6.70	3.41	5.74	3.18	5.20	3.02	4.86
14	4.60	8.86	3.74	6.31	3.34	5.56	3.11	5.03	2.96	4.69
15	4.34	8.68	3.68	6.36	3.29	5.42	3.06	4.89	2.90	4.56
16	4.49	8.53	3.63	6.23	3.24	5.29	3.01	4.77	2.85	4.44
17	4.45	8.40	3.59	6.11	3.20	5.18	2.96	4.67	2.81	4.34
18	4.41	8.28	3.53	6.01	3.16	5.09	2.93	4.58	2.77	4.25
19	4.38	8.18	3.52	5.93	3.13	5.01	2.90	4.50	2.74	4.17
20	4.35	8.10	3.49	5.85	3.10	4.94	2.87	4.43	2.71	4.10
21	4.32	8.02	3.47	5.78	3.07	4.87	2.84	4.37	2.68	4.04
22	4.30	7.94	3.44	5.72	3.05	4.82	2.82	4.31	2.66	3.99
23	4.28	7.88	3.42	5.66	3.03	4.76	2.80	4.26	2.64	3.94
24	4.26	7.82	3.40	5.61	3.01	4.72	2.78	4.22	2.62	3.90
25	4.24	7.77	3.38	5.37	2.99	4.68	2.76	4.18	2.60	3.86
26	4.22	7.72	3.37	5.33	2.98	4.64	2.74	4.14	2.39	3.82
27	4.21	7.68	3.33	5.49	2.96	4.60	2.73	4.11	2.37	3.78
28	4.20	7.64	3.34	5.43	2.95	4.57	2.71	4.07	2.56	3.75
29	4.18	7.60	3.33	5.42	2.93	4.34	2.70	4.04	2.34	3.73
30	4.17	7.56	3.32	5.39	2.92	4.31	2.69	4.02	2.53	3.70
40	4.08	7.31	3.23	5.18	2.84	4.31	2.61	3.83	2.43	3.31
60	4.00	7.08	3.15	4.98	2.76	4.13	2.32	3.65	2.37	3.34
120	3.92	6.85	3.07	4.79	2.68	3.93	2.43	3.48	2.29	3.17
∞	3.84	6.64	2.99	4.60	2.60	3.78	2.37	3.32	2.21	3.02