المركز الجامعي عبد الحفيظ بوالصوف ميلة

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

السنة الأولى ماستر : اقتصاد نقدي و مالي

المحاضرة الأولى : مدخل للاقتصاد القياسي

من إعداد الأستاذ : لفيلف عبد الحق

أستاذ بالمركز الجامعي ميلة

دكتوراه في العلوم المالية والمصرفية

السنة الجامعية 2023 -2024

المحور الأول:
مدخل للاقتصاد القياسي

مقدمة:

تحتل الدراسات القياسية مكانة هامة وبارزة في التحليل الاقتصادي، على اعتبار أن الاقتصاد القياسي جزء مهم في علم الاقتصاد الحديث يهتم باستخدام الأساليب الكمية في التحليل الاقتصادي، من خلال بحثه في اختبار النظرية والفرضيات الاقتصادية وتقييمها باستخدام الأساليب الإحصائية.

تكمن الأهمية البالغة للاقتصاد القياسي في تزويد الباحثين والمهتمين بالقضايا الاقتصادية والاجتماعية بإمكانية تفسير الظواهر والتنبؤ بقيم المتغيرات مستقبلا، من خلال استخدام الأساليب الاحصائية في الاقتصاد، وما يترتب عليه من بحث في الوسائل الاحصائية وطرق الاستدلال الاحصائي، إلى جانب البحث في التحليلات الاحصائية الأخرى.

وانطلاقا من أهمية هذه المادة العلمية بالنسبة للباحثين في مختلف الميادين، فقد قمنا بتأليف هذه المطبوعة، والتي تضم في أجزائها مجموعة من الدروس والمحاضرات التي تعتبر من مبادئ الاقتصاد القياسي، والتي يحتاجها الباحث والمهتم بالاقتصاد القياسي، خاصة طلبة السنة أولى ماستر بصفة عامة، وتخصص مالية وتجارة دولية على وجه الخصوص، مع مراعاة برنامج المقياس وفق المقرر الرسمي لوزارة التعليم العالي والبحث العلمي. المطبوعة أيضا موجهة لكل الطلبة والباحثين المهتمين بمجال الاقتصاد القياسي بكل مستوياتهم.

تتضمن هذه المطبوعة ستة محاور مدعمة بأمثلة تطبيقية وسلاسل تمارين في نهاية كل محور، يتناول المحور الأول منها عموميات حول الاقتصاد القياسي، من خلال التطرق إلى مفهوم هذا العلم، علاقته بالعلوم الأخرى، تطبيقاته ونماذجه، ومنهج البحث فيه. أما المحور الثاني فيتطرق إلى أبسط أنواع النماذج القياسية، ألا وهو النموذج الخطي البسيط، من خلال تقديمه، تقدير معلماته، خصائص مقدراته، تقييمه والتنبؤ من خلاله. ويخصص المحور الثالث للنموذج الخطي المتعدد، أيضا من خلال تقديمه، تقدير معلماته، خصائص مقدراته، تقييمه والتنبؤ من خلاله. أما المحاور الموالية فهي مخصصة للمشاكل القياسية التي قد تعترض الباحث أثناء التقييم والاختبار القياسي للنماذج المقدرة، حيث يتناول المحور الرابع مشكلة التعدد الخطي، من خلال التعرف على طبيعتها، الكشف عنها وكيفية معالجتها. أما المحور الخامس فيتناول مشكلة الارتباط الذاتي للأخطاء، بالتطرق إلى طبيعة المشكلة، اختبارات الكشف عنها وكيفية التعامل معها، لنتطرق في المحور الأخير لمشكلة عدم ثبات التباين، وبنفس المنهجية السابقة سنتناول طبيعة المشكلة، الكشف عنها ومعالجتها. لتختم هذه المطبوعة بمجموعة من الجداول الاحصائية التي يحتاجها الباحث لتقييم النموذج القياسي، سواءا احصائيا أو قياسيا.

أولا: مفهوم الاقتصاد القياسي ECONOMETRICS :

تعني كلمة ECONOMETRICS القياس (METRICS في اليونانية) في الاقتصاد، ويتضمن الاقتصاد القياسي جميع الأساليب الاحصائية والرياضية التي تستخدم في تحليل البيانات الاقتصادية[1]، يهتم بتقدير العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية من الناحية الكمية. وهناك الكثير من التعريفات لهذا المصطلح وعلى الرغم من اختلافها بالصيغة إلا أنها تشترك بأنها تعتبر الاقتصاد القياسي نوعا خاصا من التحليل الاقتصادي يستخدم كلا من النظرية الاقتصادية والرياضيات الاقتصادية والإحصاء للوصول إلى نتائجه، أي أنه يطبق العلوم الرياضية وعلم الإحصاء على النظرية الاقتصادية.

وقد عرف ثلاثة من كبار الفكر القياسي: Samuelson، Koopmans، Stone الاقتصاد القياسي بأنه فرع من فروع علم الاقتصاد، يستخدم التحليل الكمي للظواهر الاقتصادية، المبنى على أساس التماسك بين النظرية والمشاهدات، متخذا في ذلك أساليب استدلال ملائمة.[2]

وهناك آراء مختلفة حول نشأة الاقتصاد القياسي منها ما يقول إنها تعود إلى الاقتصادي البريطاني WILLIAM PETTY أواخر القرن السابع عشر، ومنها ما يقول إنها تعود إلى الإحصائي الألماني ERNEST ENGEL (1821-1896) الذي وضع قوانينه الخاصة بالدخل والاستهلاك في ضوء بيانات ميزانية الأسرة، والاقتصادي الأمريكي W. M. PEARSON (1919) الذي نشر طريقته الخاصة بتحليل الدورات الاقتصادية، التي طبقت في عدد من البلدان الرأسمالية[3]. في أواخر القرن 19 وضع الاقتصادي الفرنسي LEON WALRAS الأسس العلمية لظهور علم الاقتصاد القياسي، لينال بعده وفي القرن العشرين الاقتصاديين RAGNER FRISCH & TINBERGEN أول جائزة نوبل في الاقتصاد لأبحاثهما المتعلقة بعلم الاقتصاد القياسي، كما نال الاقتصادي LAWRENCE ROBERT KLEIN نفس الجائزة لاستخدامه نماذج الاقتصاد القياسي في تحليل السياسات الاقتصادية.

ونظرا لأهمية الاقتصاد القياسي في التحليل الاقتصادي تأسست في أميركا عام 1930 الجمعية الدولية للقياس الاقتصادي، وحقق بعدها الاقتصاد القياسي تقدما سريعا وتطورا كبيرا في دراسة الظواهر الاقتصادية المختلفة وتقدير دوال الإنتاج والتكاليف والنماذج القياسية التي تصف العلاقات الاقتصادية على مستوى الاقتصاد الكلي والجزئي. وساعد تطور وتوسع استخدام الحاسبات الالكترونية وبرامج التحليل على فتح آفاق جديدة بوجه هذا العلم.

ثانيا: علاقة الاقتصاد القياسي بالعلوم الأخرى

للاقتصاد القياسي علاقة وثيقة مع كل من علوم النظرية الاقتصادية والرياضيات الاقتصادية والإحصاء كما يلي:

1- النظريـة الاقتصادية(ECONOMIC THEORY) :

حيث تشير النظريـة الاقتصادية إلى وجود علاقات معينة بين متغيرات اقتصادية، كعلاقة فيليبس بين معدل البطالة ومعدل التضخم. أي أن النظرية الاقتصادية تزودنا بطبيعة واتجاه العلاقة بين المتغيرات، والاقتصاد القياسي يحدد ويقيس هذه العلاقة كميا.

---

[1] - خالد محمد السواعي، مبادئ الاقتصاد القياسي، دار الكتاب الثقافي، أربد، الأردن، 2018، ص 17.

[2] - محمد محمد عطوة يوسف، الاقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق، الطبعة الأولى، المكتبة العصرية، المنصورة، 2002، ص 15

[3] - أحمد سلطان محمد، هيثم يعقوب يوسف وآخرون، مقدمة تحليلية في مشاكل الانحدار باستخدام برمجية Eviews، الجزء الثاني، جامعة ديالي، العراق، 2015، ص 02.

2- الاقتصاد الرياضي:(MATHEMATICAL ECONOMICS):

يقتصر دوره على صياغة العلاقة التي تم تحديدها اعتمادا على النظرية الاقتصادية على شكل رموز ومعادلات رياضية، ومسألة قياس متغيرات هذه المعادلات وإثبات ملاءمتها للظاهرة المدروسة من مهمات الاقتصاد القياسي.

3- الإحصاء (STATISTICS):

يتمثل دوره في تجميع البيانات الإحصائية الخاصة بالمتغيرات المدروسة واللازمة للدراسة، وكذلك تطبيق الاختبارات الإحصائية المختلفة على معالم النماذج لبيان معنوية تأثير كل عامل من العوامل على الظاهرة المدروسة، ومعنوية العلاقة وتعبيرها عن الظاهرة المدروسة ومعالجة أخطاء التقدير تمهيداً لتبني هذه العلاقات.

ثالثا: تطبيقات الاقتصاد القياسي

يعتبر مجال تطبيق الاقتصاد القياسي واسعا جدا حيث يشمل كافة الظواهر الاقتصادية:

- **على مستوى الاقتصاد الجزئي:** حيث يمكن استخدام تطبيقاته لتحديد دوال الإنتاج والتكاليف على مستوى المؤسسة وكافة اشتقاقاتها مثل دوال الناتج المتوسط والناتج الحدي والتكلفة المتوسطة والحدية. وكذلك يقيس تأثير العوامل المؤثرة على الإنتاج كميا، ويحدد الحدود المثلى من كل عامل التي يجب إدخالها في العملية الإنتاجية، ويحدد التوليفة المثلى من العوامل مجتمعة التي تحقق أفضل عائد.
- **على مستوى الاقتصاد الكلي:** يمكن باستخدام النماذج القياسية تقدير دوال الاستهلاك والطلب للسلع المختلفة على المستوى الكلي. وكذلك دوال الإنتاج (بصيغها غير الخطية المختلفة). كما يمكن بناء نماذج قياسية (متعددة المعادلات) توصف الاقتصاد ككل وتتضمن دوال الدخل القومي والاستثمار والاستهلاك والتجارة الخارجية (الصادرات والواردات).

رابعا: النماذج القياسية ECONOMETRICS MODELS

تعتبر النماذج القياسية أهم أدوات الاقتصاد القياسي المستخدمة لتوصيف الظواهر الاقتصادية المدروسة لذلك لا بد من توضيح مفهوم النماذج القياسية:

- **النموذج القياسي:** هو عبارة عن علاقة(معادلة) أو منظومة من العلاقات الرياضية التي تربط بين المتغيرات الاقتصادية وتسهل وصف طبيعة العلاقة بينها بصورة خالية من التفاصيل والتعقيد وممثلة للواقع، ويضاف إلى متغيرات النموذج المتغير العشوائي الذي يمثل تأثير العوامل غير القابلة للقياس والتقدير على الظاهرة المدروسة، فيدرج تأثير هذه المجموعة من العوامل تحت اسم المتغير العشوائي[1]. يرمز للمتغيرات برموز رياضية فالمتغير التابع مثلا يرمز له عادة بالرمز (Y) ويرمز للمتغيرات المستقلة بالرموز (X_1, X_2, X_3....) حيث تمارس المتغيرات المستقلة تأثيرها على المتغير التابع، وتسمى هذه العلاقة بالعلاقة الدالية أي أن كل تغير في قيمة المتغير المستقل يؤدي إلى تغير في قيمة المتغير التابع.

[1] - لحسن عبد الله باشيوة، بحوث العمليات وتطبيقاته، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، 2011، ص 470.

واستنادا إلى العلاقة التي تربط بين المتغير التابع والمتغيرات المستقلة من جهة، وعدد المتغيرات المستقلة من جهة أخرى فإنه يمكننا التمييز بين الحالات التالية:

1- المتغير التابع يفسر بمتغير مستقل واحد وباقي العوامل المؤثرة تكون على شكل متغير عشوائي. في هذه الحالة يمكن التمييز بين:

1-1- النموذج الخطي البسيط: ويأخذ الشكل التالي:

$$Y_t = \alpha + \beta \cdot X_t + \varepsilon_t$$

سمي النموذج خطيا لأن العلاقة بين المتغير التابع والمستقل علاقة خطية، وسمي البسيط لأن عدد المتغيرات المستقلة متغير واحد فقط، و $\alpha \& \beta$ معلمات أو معاملات النموذج.

1-2- النموذج غير الخطي البسيط: في هذه الحالة توجد عدة أشكال للنماذج غير الخطية، منها : النموذج الأسي، النموذج اللوجستي .....إلخ.

2 -**النموذج الخطي المتعدد**: حيث أن المتغير التابع يفسر بعدة متغيرات مستقلة إضافة إلى المتغير العشوائي، ويأخذ الشكل التالي:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot X_{1t} + \beta_2 \cdot X_{2t} + L\ L\ + \beta_k \cdot X_{kt} + \varepsilon_t$$

3 - المتغير التابع تفسره قيمه السابقة : ويمكن كتابة النموذج على الشكل التالي:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot Y_{t-1} + \beta_2 \cdot Y_{t-2} + L\ L\ + \beta_k \cdot Y_{t-k} + \varepsilon_t$$

4 - المتغير التابع يفسر بعنصر الزمن : وهو ما يعرف بنماذج السلاسل الزمنية، وتأخذ الشكل التالي: $Y_t = f(t)$

خامسا: أهداف الاقتصاد القياسي

هناك ثلاثة أهداف أساسية للاقتصاد القياسي، وهي:[1]

1- تحليل واختبار النظريات الاقتصادية المختلفة:

تحليل واختبار النظريات الاقتصادية، يعتبر هدفا رئيسيا من أهداف الاقتصاد القياسي، ولا يمكن اعتبار النظرية الاقتصادية صحيحة ومقبولة ما لم تجتاز اختبارا كميا (عدديا) يوضح قوة النموذج ويفسر قوة العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية.

2- رسم السياسات و اتخاذ القرارات:

يساهم الاقتصاد القياسي برسم السياسات و اتخاذ القرارات عن طريق الحصول على قيم عددية لمعاملات العلاقات الاقتصادية بين المتغيرات، لتساعد رجال الأعمال والحكومات في اتخاذ القرارات الحالية من حيث توفيره لصيغ وأساليب مختلفة لتقدير المرونات والمعاملات الفنية والتكلفة الحدية و الإيرادات الحدية وغير ذلك، وعلى هذا الأساس فإن معرفة القيم العددية لمعاملات النموذج المقدر تساعد على إجراء المقارنات واتخاذ القرار المناسب سواء على مستوى المؤسسة أو الدولة.

3- التنبؤ بقيم المتغيرات الاقتصادية في المستقبل:

يساعد الاقتصاد القياسي رجال الأعمال والحكومات في وضع السياسات من خلال توفير القيم العددية لمعاملات المتغيرات الاقتصادية والتنبؤ بما ستكون عليه الظاهرة الاقتصادية مستقبلا.

ومثل هذه التنبؤات تمكن واضعي السياسات ومتخذي القرار من تنظيم الحياة الاقتصادية واتخاذ إجراءات معينة للتأثير في متغيرات إقتصادية معينة، مثال ذلك لو أرادت الحكومة أن تحدد مستوى التوظيف فمن الضروري أن تعرف وتحدد مستوى

[1] - حسين علي بخيت، سحر فتح الله، الاقتصاد القياسي، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، 2006، ص 19.

التوظيف الحالي، إضافة إلى معرفة وضعه في المستقبل. كذلك إذا أرادت الحكومة معرفة الآثار المحتملة للسياسة النقدية على التضخم والبطالة، وما هو الأثر المتوقع لزيادة أسعار السلع البديلة أو المكملة على الكمية المطلوبة من السلع الأصلية. حيث يمكن القول أن الاقتصاد القياسي سوف يحدد مستوى التوظيف فيما إذا كان مرتفعا أو منخفضا، وكذلك يجيب على بقية الأسئلة المتعلقة بالمستقبل.

سادسا: منهج البحث في الاقتصاد القياسي

يمر أي بحث قياسي بأربعة مراحل هي: تعيين النموذج، تقدير معلمات النموذج، تقييم معلمات النموذج واختبار مقدرة النموذج على التنبؤ. و يمكن شرح هذه المراحل فيما يلي:

1- تعيين النموذج:[1]

يقصد بتعيين النموذج صياغة العلاقات محل الدراسة في صورة رياضية، حتى يمكن قياس معاملاتها باستخدام ما يسمى بالطرق القياسية، و تنطوي هذه المرحلة على الخطوات التالية:

1-1- تحديد متغيرات النموذج:

حيث تنطوي هذه المرحلة على تحديد المتغير التابع والمتغيرات المستقلة (التفسيرية)، وبإمكان الباحث تحديد المتغيرات التي يحتويها النموذج عند دراسة ظاهرة اقتصادية معينة من خلال مصادر عديدة، منها النظرية الاقتصادية، الدراسات القياسية في نفس المجال، المعلومات المتعلقة بالظاهرة. إلا أنه ونظرا لصعوبة حصر جميع المتغيرات المستقلة المؤثرة في المتغير التابع، يقتصر الباحث على إدراج المتغيرات الأكثر أهمية فقط، أما باقي المتغيرات فإنها تدرج ضمن ما يعرف بالمتغير العشوائي.

1-2- تحديد الشكل الرياضي للنموذج:

يقصد بالشكل الرياضي للنموذج عدد المعادلات التي يحتويها النموذج (نموذج المعادلة الواحدة والنموذج متعدد المعادلات)، و درجة خطية النموذج (خطي أو غير خطي)، و درجة تجانس كل معادلة[2]. ونظرا لكثرة النماذج القياسية فإن النظرية الاقتصادية نادرا ما تعطينا الشكل الرياضي للعلاقات التي نريد صياغتها في شكل رياضي، باستثناء تلك المتعلقة بنظريات الاستهلاك، الاستثمار، .....إلخ.

وتكتسي مرحلة تحديد الشكل الرياضي للنموذج أهمية بالغة ، بحكم أن أي خطأ في تحديد هذا الشكل يؤدي أخطاء في قياس وتقدير العلاقة محل البحث.

ولتجاوز ما لا تقدمه النظرية الاقتصادية عن الشكل الرياضي للعلاقة بين المتغيرات المدروسة، فإن الباحث يمكنه الاعتماد على عدة أساليب تعينه على التحديد الصحيح لهذا الشكل، فبعد جمع البيانات عن متغيرات الدراسة، يقوم الباحث بعرضها على شكل سحابة نقاط من محورين، المحور الأفقي يتضمن قيم أحد المتغيرات المستقلة، بينما يتضمن المحور العمودي قيم المتغير التابع. وعلى هذا الأساس يمكن للباحث اختيار الشكل الرياضي المناسب للنموذج المتضمن متغيرين فقط، أحدهما تابع والآخر مستقل. ففي حالة أكثر من متغير مستقل، وحتى ولو كانت العلاقة بين المتغير التابع وكل متغير مستقل علاقة خطية، فلا يوجد ما يضمن أن تبقى هذه العلاقة خطية عند إدراج كل المتغيرات المستقلة دفعة واحدة في النموذج. وعليه فإن الباحث يقوم

[1] - عبد القادر محمد عبد القادر عطية، الحديث في الاقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق، الطبعة الأولى، الدار الجامعية، الاسكندرية، 2005، ص 16.

[2] - أحمد سلطان محمد، هيثم يعقوب يوسف وآخرون، مرجع سبق ذكره، ص44.

بتجريب وتقدير مختلف الصيغ الرياضية للنموذج المراد بناؤه، ثم يختار الصيغة التي تعطي نتائج أكثر معقولية من الناحية الاقتصادية والاحصائية.

أما بالنسبة لمعادلات النموذج، فالباحث يعتمد على عدة أسس وعوامل تحدد عدد هذه المعادلات، نذكر من أهمها:[1]

- تعقيد الظاهرة: إذا كان للمتغيرات المدروسة علاقات متشابكة فيما بينها، ما يجعل من الظاهرة المدروسة جد معقدة، فإن استخدام نموذج معادلة واحدة لتفسير سلوكها قد يعطي نتائج خاطئة، حيث أنه من الأفضل استخدام نموذج متعدد المعادلات، يأخذ العلاقات المتشابكة بعين الاعتبار.
- الهدف من تقدير النموذج: ويعتبر أحد العوامل الرئيسية المحددة لعدد معادلات النموذج، فإذا كان الهدف قياس التأثير المتبادل بين مجموعة من المتغيرات، فإن هذا يتطلب بناء نموذج متعدد المعادلات، وإذا كان الهدف قياس التأثير من متغير إلى آخر مع اهمال الأثر العكسي، فإن نموذج المعادلة الواحدة يفي بالغرض.
- توفر البيانات: من العوامل المحددة ايضا لعدد معادلات النموذج نجد توفر بيانات المتغيرات المراد ادراجها في معادلات النموذج، ففي بعض الحالات قد يضطر الباحث لإسقاط علاقة أو أكثر نظرا لدم توفر بيانات عنها، أو لعدة القدرة على قياسها.

1-3- تحديد التوقعات القبلية:

إن تحديد توقعات نظرية مسبقة عن إشارة و حجم معلمات العلاقة الاقتصادية محل القياس، أمر جد مهم لمرحلة ما بعد التقدير، حيث يتم اختبار المدلول الاقتصادي للمعلمات المقدرة من خلال مقارنتها مع التوقعات القبلية من حيث إشارتها و حجمها.

2- تقدير معلمات النموذج:

بعد صياغة العلاقات محل البحث في شكل رياضي خلال مرحلة التعيين، نقوم بتقدير معلمات النموذج، وذلك بالاعتماد على بيانات واقعية يتم جمعها عن المتغيرات التي يتضمنها النموذج، و على تقنيات قياسية تستخدم في عملية القياس، و أثناء هذه المرحلة نقوم بما يلي:

2-1- تجميع البيانات:

يقوم الباحث بجمع البيانات عن متغيرات النموذج من مصادر متعددة، حيث نجد أن هذه البيانات يمكن أن تأخذ أحد الأشكال التالية:

- **بيانات السلاسل الزمنية:**

هي البيانات المأخوذة عبر الزمن أو عبر سلسلة زمنية معينة، أو بعبارة أخرى هي البيانات المأخوذة في اللحظات المتعاقبة أو الدقائق، الساعات، الأيام، الأسابيع، الأشهر، السنوات....إلخ[2]. وعلى هذا الأساس فالبيانات الزمنية تكون مرتبة وفق زمن حدوثها ويمكن أن يكون لها تكرار زمني مختلف (سنوية، سداسية، فصلية، شهرية .....)، ويرمز لمؤشر الزمن بالرمز t ، فمثلا إذا كان Y يرمز للناتج المحلي في الجزائر من 2000 إلى 2016، فإننا نرمز له بالرمز:

[1] - أحمد سلطان محمد، هيثم يعقوب يوسف وآخرون، المرجع السابق، ص 45.

[2] - عدنان داود محمد العذاري، الاقتصاد القياسي نظرية وحلول، الطبعة الأولى، دار جرير للنشر والتوزيع، عمان، 2010، ص 14.

$$Y_t \qquad / t = 2000 \text{ L } 2016$$

السنة	2000	2001		2015	2016
الناتج المحلي	.....	.....		.....	....

تمتاز بيانات السلاسل الزمنية بخاصية ارتباطها بماضيها القريب، مما يجعل من نمذجتها أمرا معقدا، حيث يتم أخذ عنصر الزمن في الحسبان، من خلال اعتبار الماضي القريب للسلسلة كمتغير مستقل يفسر سلوكها في الحاضر.

- **البيانات المقطعية:**

تتكون مجموعة البيانات المقطعية في عينة الأفراد، أو القطاع العائلي، أو الشركات، أو الدول، أو المناطق، أو المدن، أو أي نوع من الوحدات في نقطة محددة من الزمن. وفي بعض الحلات لا تتماثل الفترة الزمنية للبيانات بالضبط[1]. ويرمز لرقم الوحدة عادة بالرمز ا، فمثلا إذا كان Y يمثل الناتج المحلي لعينة حجمها 20 دولة، فإننا نرمز له بالرمز:

$$Y_i \qquad / i = 1 \text{L } \text{L } \text{L } 20$$

الدولة	1	2	.....	19	20
الناتج المحلي	.....	.....	.....	.....	....

- **البيانات الطولية (بيانات السلاسل الزمنية المقطعية):**

تتكون بيانات PANEL من سلاسل زمنية لكل طرف مقطعي في مجموعة البيانات[2]، كأن نأخذ مثلا تطور الناتج المحلي لـ10 دول عربية خلال الفترة 2000-2016، فإننا نرمز له بالرمز:

$$Y_t^i \qquad / t = 2000 \text{ L } \text{ L } \text{ L } 2016 \qquad \text{et} \qquad i = 1 \text{L } \text{ L } \text{ L } 20$$

الدولة	1			2			.....	20		
السنة	2000	.....	2016	2000	.....	2016	.....	2000	.....	2016
الناتج م	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	....	.....	....

2-2- اختيار طريقة القياس الملائمة:

من بين الطرق الممكن استخدامها في عملية التقدير نجد: طريقة المعادلة الواحدة وطريقة المعادلات الآنية، حيث تستخدم الأولى في تقدير معلمات نموذج مكون من معادلة واحدة، أو تقدير معلمات نموذج مكون من مجموعة من المعادلات، على أن تقدر كل واحدة على حدى، ومن أهم هذه الطرق نجد طريقة المربعات الصغرى العادية. بينما تستخدم الثانية (طريقة المعادلات الآنية) في تقدير النموذج المشكل من مجموعة من المعادلات ذات التأثير المتبادل، ومن أهمها طريقة المربعات الصغرى العادية ذات المرحلتين وطريقة م ص ع ذات الثلاث مراحل، حيث تختلف هذه الطرق حسب مدى ملاءمتها لعملية القياس، وذلك تبعا لعدة عوامل منها طبيعة العلاقة محل الدراسة، وخصائص المقدرات التي تنتج عن كل طريقة، كما تختلف أيضا من حيث كمية البيانات التي تتطلبها كل طريقة وتكاليف البحث.

[1] - خالد محمد السواعي، مرجع سبق ذكره، ص 26.

[2] - المرجع السابق، ص 29.

تقييم معلمات النموذج:

بعد الانتهاء من تقدير القيم الرقمية لمعلمات النموذج، نقوم بتقييم المعلمات المقدرة، أي تحديد ما إذا كانت قيم هذه المعلمات لها مدلول أو معنى من الناحية الاقتصادية، وما إذا كانت مقبولة من الناحية الإحصائية والقياسية، و هذا بالاعتماد على المعايير التالية:[1]

1- المعايير الاقتصادية:

إن هذه المعايير تحددها مبادئ النظرية الاقتصادية والمنطق الاقتصادي، وتتعلق بإشارة وحجم معاملات العلاقات الاقتصادية، بحث أن النظرية الاقتصادية تفرض قيودا على بعض إشارات وقيم معاملات العلاقات الاقتصادية (مثل القيود على المرونات أو المضاعفات أو الميول الحدية...الخ)، فإذا كانت التقديرات مخالفة للقيود النظرية ينبغي عندئذ رفض النموذج، مالم يكن هناك سبب جوهري يدعو الباحث للتمسك بالإشارة أو القيمة المخالفة للنظرية، وعليه توضيح سبب قبوله للنموذج رغم مخالفته لمتطلبات النظرية الاقتصادية، فقد يعود سبب مخالفته لافتراضات النظرية الاقتصادية إلى عدم كفاءة البيانات المستخدمة أو صغر حجم العينة.

فعلى سبيل المثال أن النظرية الكينزية تقرر أن الاستهلاك يتحدد في الاجل القصير بالدخل، حيث كلما زاد الدخل زاد الاستهلاك، كما تفترض هذه النظرية أن الدخل يتوزع بين الاستهلاك والادخار، ومن ثم فغن الزيادة في الدخل تتوزع بين زيادة الاستهلاك وزيادة الادخار. وتفترض النظرية أيضا أن استهلاك المجتمع في الاجل القصير لا يمكن أن يكون سالبا او منعدما حتى انخفض الدخل إلى الصفر.

ويمكن ترجمة ما تقرره هذه النظرية إلى صيغة رياضية كمايلي:

$$C = c_0 + b \cdot Y$$

حيث: C : يمثل الاستهلاك، Y : يمثل الدخل.

ووفقا لهذه النظرية من المتوقع أن تكون $c_0 > 0$ ، وهذا يعني أن المجتمع لابد أن يستهلك، حتى ولو انخفض دخله الكلي إلى الصفر في الأجل القصير، ويتم هذا بالاعتماد على الاقتراض الخارجي، أو السحب من المدخرات السابقة. إضافة إلى ذلك فإن: $0 < b < 1$ ، أي أن الميل الحدي للاستهلاك يجب أن يكون موجبا وتتراوح قيمته بين الصفر والواحد.

وهكذا فإن نظرية الاستهلاك الكينزية قد وضعت معايير وقيود اقتصادية خاصة بإشارة وحجم المعلمتين c_0 و b ، ويتعين على أي محاولة لقياس دالة الاستهلاك في الأجل القصير أن تعطي نتائج تتفق مع هذه المعايير حتى يتم قبولها اقتصاديا.

2- المعايير الإحصائية:

بعد اجتياز النموذج للمعايير الاقتصادية ينتقل الباحث إلى معايير النظرية الاحصائية، للتأكد من أن جميع معلمات النموذج وجميع معادلاته ذات معنوية احصائية. وهناك بعض الاختبارات الاحصائية لقياس جودة النموذج المقدر وكذا ملاءمته لواقع البيانات، من أهمها نجد:

- **معامل التحديد** R^2 : يعد هذا المعامل من أهم مقاييس القدرة التفسيرية والتنبؤية للنموذج المقدر، وتتراوح قيمته بين الصفر والواحد الصحيح، أي: $0 \leq R^2 \leq 1$ ، وكلما اقترب من الواحد الصحيح تكون القدرة التفسيرية والتنبؤية عالية.

[1] - أحمد سلطان محمد، هيثم يعقوب يوسف وآخرون، مرجع سبق ذكره، ص ص 52-56، بتصرف.

وغالبا ما يستخدم معامل التحديد المصحح، والذي يرمز له بالرمز $\overline{R}^2$ بدلا من R^2 ، كونه يتمتع بخصائص أكثر أهمية في توضيح القدرة التفسيرية للنموذج.

- **اختبار Fisher:** يستخدم لاختبار المعنوية الكلية للنموذج، وتبيان قوة العلاقة بين المتغيرات المستقلة والمتغير التابع.
- **اختبار Student:** يستخدم لبيان معنوية تأثير المتغير المستقل على المتغير التابع، وذلك بعد مقارنة الاحصائية المحسوبة مع الاحصائية المجدولة، فإذا كانت الأولى أكبر من الثانية فإن ذلك يدل على أهمية المتغير المستقل في تفسير انحرافات المتغير التابع.

3- المعايير القياسية:

تهدف هذه المعايير إلى التأكد من أن الافتراضات التي تقوم عليها المعايير الإحصائية منطبقة مع الواقع، فإذا كانت هذه الافتراضات متوفرة في الواقع، فالمعلمات ستكتسب صفات معينة أهمها: عدم التحيز والاتساق، أما إذا لم تتحقق هذه الافتراضات فالمعلمات المقدرة ستفقد بعض الصفات السابقة، بل و يؤدي إلى عدم صلاحية المعايير الإحصائية نفسها لقياس مدى الثقة في المعلمات المقدرة، منها: اختبارات الارتباط الذاتي، اختبارات التعدد الخطي، اختبارات ثبات التباين.

- **اختبارات الارتباط الذاتي:** ومن أهمها اختبار Durbin-Watson، والذي يستخدم لغرض معرفة ما إذا كان هناك ارتباط تسلسلي بين الانحرافات عن الخط المقدر أم لا، أي هل هناك تأثير لقيم السنوات الماضية على قيم السنوات الحالية، والقاعدة العامة هي كلما اقتربت احصائية Durbin-Watson من 2 فهذا يدل على عدم وجود ارتباط ذاتي (Autocorrelation)، وهو فرض استقلالية الأخطاء.
- **اختبارات التعدد الخطي:** ومن أهمها اختبار Klein للكشف عن مشكلة التعدد الخطي (Multicolinearity) التي تشير إلى وجود ارتباط خطي بين المتغيرات المستقلة، ومن آثار هذه المشكلة نجد عدم دقة مقدرات طريقة المربعات الصغرى العادية، وأن الخطأ المعياري لهذه المقدرات يكون مرتفعا بشكل كبير. ويتم تطبيق هذا الاختبار بمقارنة معاملات الارتباط الجزئية للمتغيرات المستقلة مع معامل التحديد، حيث يشير هذا الاختبار إلى وجود مشكلة التعدد الخطي في حالة ما إذا كانت معاملات الارتباط الجزئية أكبر من معامل التحديد.
- **اختبارات ثبات التباين:** ومن أهمها اختبار Goldfeld-Quandt للكشف عن عدم ثبات التباين (Heteroscedasticity)، حيث يؤثر اختلاف وعدم ثبات التباين على تباين المعلمات المقدرة، فيسبب وجود عدم ثبات التباين الحصول على مقدرات بتباين أقل من التقدير (Underestimate)، وبالتالي الحصول على نتائج للاختبارات الاحصائية الواردة سابقا أكبر من المتوقع، وبالتالي فإن عدم ثبات التباين له تأثير واسع على اختبار الفرضيات. يقوم هذا الاختبار على أن تباين البواقي إذا كان ثابتا لجميع المشاهدات، فإن تباين جزء من أجزاء العينة سيكون مساويا لتباين جزء آخر من العينة. لكي يكون الاختبار قابلا للتطبيق، يتعين تحديد المتغير المستقل المرتبط بتباين البواقي.

تقييم قدرة النموذج على التنبؤ:

يمكن تعريف التنبؤ أنه تقدير كمي للقيم المتوقعة للمتغيرات التابعة في المستقبل، بناءا على ما هو متاح من معلومات عن الماضي و الحاضر، والتنبؤ يفترض أن سلوك الظواهر الاقتصادية في المستقبل القريب ما هو إلا امتداد لسلوكها في الماضي

القريب، ومنه فإن حدوث تغيرات فجائية لم تكن متوقعة من الممكن أن تؤدي إلى عدم دقة التنبؤ الخاص بمستقبل الظواهر الاقتصادية.

لقد أوضحنا سابقا أن من أهداف الاقتصاد القياسي هو التنبؤ بقيم المتغيرات الاقتصادية في المستقبل، لذا يتعين اختبار مدى قدرة النموذج القياسي على التنبؤ قبل استخدامه في هذا الغرض. فمن الممكن أن يجتاز النموذج جميع الاختبارات السابقة ولكنه لا يكون صالحا للتنبؤ.

ولاختبار مقدرة النموذج على التنبؤ لابد من اختبار مدى استقرار المعلمات المقدرة عبر الزمن، واختبار مدى حساسية هذه المقدرات للتغير في حجم العينة. ومن الأساليب المستخدمة في اختبار مقدرة النموذج على التنبؤ نجد:

1- اختبار معنوية الفرق:

يعتمد هذا الاختبار على التنبؤ بعد التحقق (Ex-Post Forecast) في اختبار مقدرة النموذج على التنبؤ، فإذا كانت القيمة المتوقعة تساوي القيمة الفعلية للمتغير المتنبئ به، أو أن الفرق بينهما غير جوهري، فإن مقدرة النموذج على التنبؤ تكون عالية جدا، أما إذا كان الفرق بينهما جوهريا، فإن هذا يشير إلى ضعف القدرة التنبؤية للنموذج القياسي.

2- معامل عدم التساوي لـ: Theil:

يعتمد هذا المعامل على الفرق بين تغير القيم الفعلية والقيم التنبؤية، فكلما اقتربت قيمة معامل Theil من الصفر، كلما دل ذلك على القدرة التنبؤية الكبيرة للنموذج، وكلما زادت قيمة معامل Theil عن الواحد كلما دل ذلك على انخفاض القدرة التنبؤية للنموذج. وإذا تساوت قيمته مع الواحد أشار ذلك إلى ثبات القيم المتوقعة للمتغير التابع عبر الزمن.

3- معامل جانس:

إن هذا المعامل يقيس مقدرة النموذج على التنبؤ خلال فترة العينة وخلال فترة ما بعد العينة، وتتراوح قيمته ما بين الصفر والمالانهاية، وكلما زادت قيمة هذا المعامل كلما دل ذلك على ضعف القدرة التنبؤية للنموذج، وعندما يكون مساويا للواحد فإن ذلك يعني أن قدرة التنبؤ في الماضي تتساوى معها في المستقبل.

4- متوسط مربع الخطأ:

يستخدم هذا المقياس للمقارنة بين القدرة التنبؤية لأكثر من نموذج، ويكون أفضل نموذج هو النموذج الذي يعطي أقل متوسط لمربعات الخطأ.

المحور الثاني:
النموذج الخطي البسيط

مقدمة

يعتبر الانحدار أحد الأساليب الاحصائية التي تستخدم في قياس العلاقات الاقتصادية، حيث يختص بقياس العلاقة بين متغير ما يسمى بالمتغير التابع ومتغير آخر أو مجموعة من المتغيرات تسمى بالمتغيرات المستقلة أو التفسيرية. ويلاحظ في هذا الصدد أن الانحدار كأسلوب قياس ليس هو الذي يحدد أي المتغيرات تابع وأيها مستقل، وإنما يستعين البحاث في تحديد ذلك إما بالنظرية الاقتصادية أو الملاحظة، فمن النظرية الاقتصادية يمكن للباحث أن يعرف أن كمية النقود متغير مستقل وأن التضخم متغير تابع، كما يمكنه من الملاحظة أن يعرف أن التلوث ممثلا في انبعاثات ثاني أكسيد الكربون متغير تابع وأن حجم النشاط الاقتصادي متغير مستقل.

تنقسم نماذج الانحدار إلى قسمين رئيسيين، خطية وغير خطية، والخطية بدورها تنقسم الى خطية بسيطة وخطية متعددة، وأساس التفرقة بين البسيطة والمتعددة هو عدد المتغيرات المستقلة المدرجة بالنموذج، فالنماذج الخطية البسيطة تقيس العلاقة بين متغيرين أحدهما تابع والآخر مستقل، أما الخطية المتعددة فتقيس العلاقة بين متغير تابع واحد وأكثر من متغير مستقل.

أولا: تقديم النموذج

1- شكل النموذج:

يأخذ النموذج الخطي البسيط الشكل التالي:

$$Y_t = \alpha + \beta \cdot X_t + \varepsilon_t$$

حيث: Y : المتغير التابع، أو المتغير الداخلي.

X : المتغير المفسر، أو المتغير المستقل.

ε : المتغير العشوائي.

α و β : معلمات للتقدير.

t : مؤشر الزمن.

تمثل المعلمة α الجزء الثابت، وهو الجزء المقطوع من المحور الرأسي، وهو عبارة عن قيمة متوسط المتغير التابع لما تنعدم قيمة المتغير المستقل، بينما تمثل المعلمة β معامل الانحدار أو ميل الخط المستقيم، وتعبر عن مقدار التغير في المتغير التابع نتيجة لتغير المتغير المستقل بوحدة واحدة، وتبين اشارتها إذا ما كانت العلاقة بين المتغير التابع والمستقل علاقة طردية أو عكسية.

إن إدخال المتغير العشوائي ε_t في النموذج القياسي له عدة مسوغات أهمها أنه عبارة عن مجموعة شاملة تتضمن كل تلك المتغيرات التي لا يمكن قياسها بسهولة، قد يمثل هذا الحد المتغيرات التي لا يمكن إدراجها في النموذج لعدم توفر البيانات، أو أخطاء في القياس في البيانات، أو العشوائية الموجودة في السلوك البشري.[1]

[1] - مها محمد زكي، الاقتصاد القياسي بالأمثلة، الطبعة الأولى، حميثرا للنشر والترجمة، القاهرة، 2019، ص 32.

ومع ذلك فإن إدخال المتغير العشوائي ε_t في النموذج القياسي يقتضي وضع بعض الافتراضات التي تتعلق بوسطه الحسابي (أو قيمته المتوقعة) وتباينه وتغاير قيمه المختلفة فيما بينها وتغاير قيمه المختلفة مع قيم المتغير (أو المتغيرات) المستقل في النموذج.

2- فرضيات النموذج:

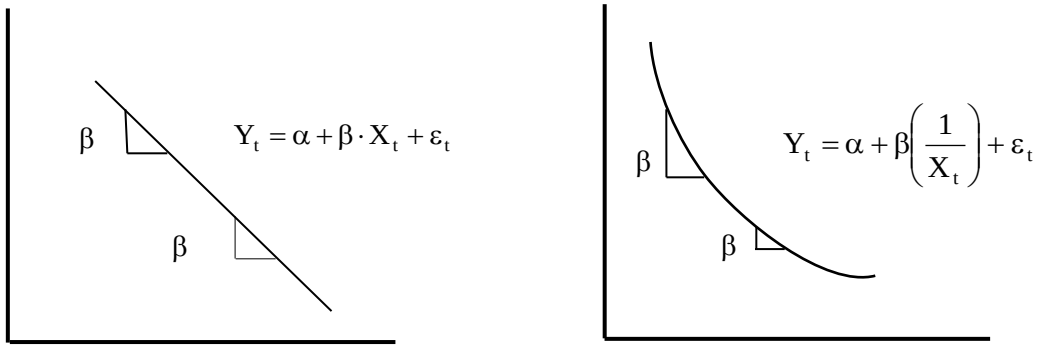
قبل تناول فرضيات النموذج الخطي البسيط نحاول أن نبرز مفهوم الخطية في تحليل الانحدار، حيث أن الخطية بصفة عامة يمكن تفسيرها في كل من:

- **الخطية في المتغيرات:** من خلال خطية المقدرات يمكن فهم أن المتغيرات المستقلة يجب أن تكون خطية، أي أن أسها يجب أن يساوي الواحد (1)، مما يجعل من النماذج التالية نماذج غير خطية:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t^2 + \varepsilon_t \qquad L\ (01)$$

$$Y_t = \alpha + \beta\left(\frac{1}{X_t}\right) + \varepsilon_t \qquad L\ (02)$$

فإذا قمنا مثلا بتقدير كل من النموذج الخطي الأساسي $\left(Y_t = \alpha + \beta \cdot X_t + \varepsilon_t\right)$ والنموذج الغير الخطي الثاني $\left(Y_t = \alpha + \beta\left(\frac{1}{X_t}\right) + \varepsilon_t\right)$، فإننا نجد أن الميل يكون ثابتا في النموذج الخطي، بينما يكون متغيرا بتغير قيم X في النموذج الغير خطي، كما هو موضح في الشكل التالي:



- **الخطية في المعلمات:** أن المتغير التابع هو دالة خطية للمعلمات، سواء كانت المتغيرات المستقلة خطية أم لا، فنقول عن النموذج أنه خطي إذا كانت المعلمات تظهر بأس يساوي الواحد (1)، لذا فبالرجوع إلى النموذجين (01) و(02) نجد أنهما خطيين بعض النظر عن خطية أو عدم خطية المتغير المستقل X، بينما نجد أن النموذج التالي:

$$Y_t = \alpha + \beta^2 \cdot X_t + \varepsilon_t$$

هو نموذج غير خطي لأن المعلمة β تظهر بأس يساوي 2.

بالنسبة للنموذج الخطي الذي سوف نتعامل معه في الاقتصاد القياسي نقصد به النموذج الخطي في المعالم، لأن النموذج غير الخطي في المتغيرات المستقلة يسهل التعامل معه من خلال تحويله إلى نموذج خطي.

2-1- الفرضيات الاحتمالية:

إن الطريقة المستعملة في تقدير معاملات نموذج الانحدار الخطي البسيط هي طريقة المربعات الصغرى العادية "OLS"، التي تم وضعها من طرف : CARL FRIEDRICH GAUSS، بناءا على بعض الفرضيات التي تجعل منها الطريقة الأكثر استعمالا، و تدور هذه الفرضيات حول طبيعة وشكل المتغير العشوائي، وهي:

- $\forall t \quad E(\varepsilon_t) = 0$: وتنص هذه الفرضية على أن الأخطاء لا تدخل في تفسير Y ، حيث تعبر عن قيم عشوائية تأخذ قيما سالبة، موجبة أو معدومة، لا يمكن قياسها وتحديدها بدقة، تخضع للقوانين الاحتمالية، حيث أن أملها الرياضي أو متوسطها يكون معدوما.
- $\forall t \quad V(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = \delta_\varepsilon^2$: ثبات أو تجانس التباين (HOMOSCEDASTICITY). أي أن تشتت الأخطاء حول متوسطها المعدوم
- $\forall i \neq j \quad Cov(\varepsilon_i \varepsilon_j) = E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$: عدم وجود ارتباط ذاتي بين الأخطاء، أي أن التباينات المشتركة بين الأخطاء تكون معدومة.
- $Cov(x_t . \varepsilon_t) = 0$: عدم وجود ارتباط بين المتغير المستقل والمتغير العشوائي.
- $\varepsilon_t \rightarrow N(0 . \delta_\varepsilon^2)$: التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي هو التوزيع الطبيعي.

2-2- فرضيات أخرى:

- المتغيرات Y و X محددة بدون خطأ.
- قيم المتغير X غير عشوائية.

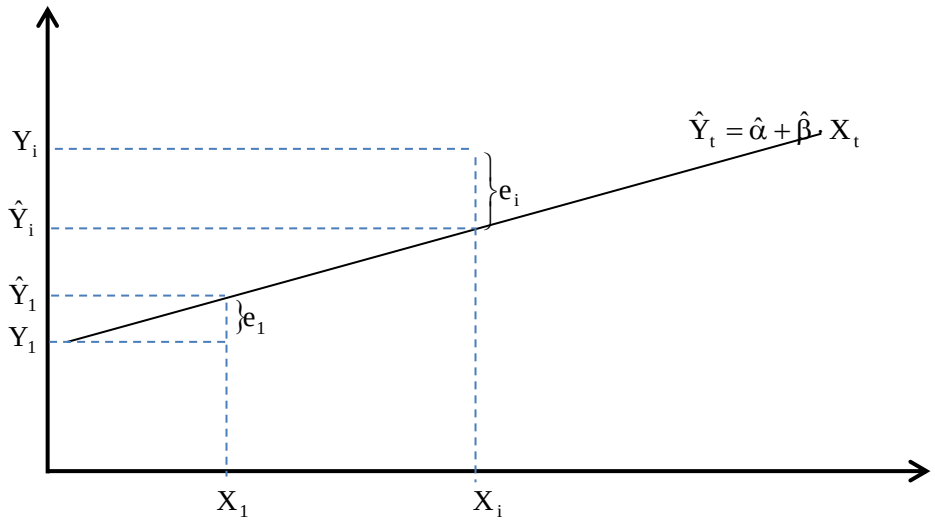
ثانيا: تقدير النموذج الخطي البسيط

يتم تقدير نموذج الانحدار الخطي البسيط بطريقة المربعات الصغرى العادية (ORDINARY LEAST SQUARES)، التي تهدف إلى الحصول على مقدرات $\hat{\alpha}$. $\hat{\beta}$ تعطي مجموع مربعات انحراف القيم المقدرة عن القيم الحقيقية في أدنى قيمة له.

ليكن النموذج: $Y_t = \alpha + \beta \cdot X_t + \varepsilon_t$ ، و تحت فرضيات طريقة المربعات الصغرى العادية نجد:

- النموذج المقدر: $\hat{Y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \cdot X_t$.
- انحراف القيم المقدرة عن القيم الحقيقية: $e_t = Y_t - \hat{Y}_t = Y - \hat{\alpha} - \hat{\beta} \cdot X_t$.
- مجموع مربعات البواقي: $\sum e_t^2 = \sum (Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} \div X_t)^2$.

تهدف طريقة المربعات الصغرى العادية إلى إيجاد التوليفة الخطية $\hat{\alpha} + \hat{\beta} \cdot X_t$ التي تعطي قيمة $\hat{Y}_t$ جد قريبة من القيمة الفعلية Y_t ، ومنه فإننا سنحاول إيجاد هذه التوليفة بحيث يكون $\sum e_t = \sum (Y_t - \hat{Y}_t)$ في أدنى قيمة له. لكن بالمقابل فإن هذا المعيار يعتبر غير كاف لأنه مهما كانت قيم e_t فإن مجموعها يساوي الصفر، أي: $\sum e_t = 0$ ؟، ولهذا فإننا سنستعمل معيارا آخر هو $\sum e_t^2$ ، وهو المبدأ الأساسي لطريقة المربعات الصغرى العادية حيث تهدف إلى جعل $\sum e_t^2$ في أدنى قيمة لها أي إيجاد $Min \sum e_t^2$.



فنقوم بحساب المشتقات الجزئية لـ: $\sum e_t^2$ بالنسبة إلى $\hat{\alpha}$. $\hat{\beta}$ ، و نجعلها مساوية للصفر.

نضع: $S = \sum e_t^2 = \sum (Y - \hat{\alpha} - \hat{\beta} \cdot X_t)^2$.

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{\beta}} = 0 \text{ و } \frac{\partial S}{\partial \hat{\alpha}} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{\alpha}} = \frac{\partial \sum \left(Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} \cdot X_t\right)^2}{\partial \hat{\alpha}} = -2 \sum \left(Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} \cdot X_t\right)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{\alpha}} = 0 \Rightarrow -2 \sum \left(Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} \cdot X_t\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum \left(Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} \cdot X_t\right)$$

$$\Rightarrow \sum Y_t - \sum \hat{\alpha} - \hat{\beta} \sum X_t = 0$$

$$\Rightarrow n \cdot \overline{Y} - n \cdot \hat{\alpha} - \hat{\beta} \cdot n \cdot \overline{X} = 0$$

$$\Rightarrow n \cdot \hat{\alpha} = n \cdot \overline{Y} - \hat{\beta} \cdot n \cdot \overline{X}$$

ومنه: $\hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta} \cdot \overline{X}$

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{\beta}} = \frac{\partial \sum (Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_t)^2}{\partial \hat{\beta}} = -2 \sum (Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_t) \cdot X_t$$

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{\beta}} = 0 \Rightarrow -2 \sum (Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_t) \cdot X_t = 0$$

$$\Rightarrow \sum (Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_t) \cdot X_t = 0$$

$$\Rightarrow \sum Y_t X_t - \hat{\alpha} \sum X_t - \hat{\beta} \sum X_t^2 = 0$$

$$\Rightarrow \sum Y_t X_t - (\overline{Y} - \hat{\beta} \overline{X}) \sum X_t - \hat{\beta} \sum X_t^2 = 0$$

$$\Rightarrow \sum Y_t X_t - \overline{Y} \sum X_t + \hat{\beta} \overline{X} \sum X_t - \hat{\beta} \sum X_t^2 = 0$$

$$\Rightarrow \sum Y_t X_t - n \overline{XY} - \hat{\beta} (\sum X_t^2 - n \overline{X}^2) = 0$$

ومنه: $\hat{\beta} = \frac{\sum X_t Y_t - n \overline{YX}}{\sum X_t^2 - n \overline{X}^2} = \frac{\sum (Y_t - \overline{Y}) \cdot (X_t - \overline{X})}{\sum (X_t - \overline{X})^2} = \frac{Cov(X_t . Y_t)}{V(X_t)}$

مثال:

ترغب إحدى الشركات في تحديد العلاقة بين إنفاقها على الدعاية والاعلانات وعوائد المبيعات، كلاهما بالمليون دينار جزائري، فإذا كانت لدينا البيانات التالية عن تطور هاذين المتغيرين من 2009 إلى 2018 كمايلي:

السنة	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
الاعلانات	4	5	6	6	7	8	7	9	8	10
المبيعات	44	42	52	48	50	60	58	62	64	70

المطلوب:

- مثل بيانيا بيانات الجدول بسحابة النقاط، ماذا تستنتج؟
- قدر النموذج الخطي البسيط الذي يقيس أثر الانفاق على الاعلانات على عوائد المبيعات في هذه الشركة، وفسر النتائج.
- حساب القيم المقدرة $\hat{Y}_t$ واستنتاج بواقي التقدير e_t.

يتم حل المثال خلال حصّة التطبيق