University Center of Mila
Department of ST

2024/2025
L1-S02

Mathematics II
Work Sheet 1

Exercise 1. We define the matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \\ 3 & -2 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Is it possible to calculate the products ABC, CBA, and BAC ? If yes, find them with tow methods (verify the associativity of the product).

Exercise 2. Let A and B be the matrices

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

In each case, find the matrix A such that :

- (a) $A^2 = A$.
- (b) $A^2 = I_2$.
- (c) $AB = BA$.

Exercise 3. Let a be a non zero real number, and let

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

be a matrix of order 2. Calculate A^n the power of A ($n \in \mathbb{Z}$).

Exercise 4.

(a) Find the inverse matrix of the next matrices.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 11 & 1 \\ 2 & 9 & -11 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 4 & -10 \end{bmatrix}.$$

(b) Suppose

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Prove that A verify the relation $A^3 - 2A^2 - 5A - 24I_3 = 0$. Deduce the inverse matrix of A.

Exercise 5. Let $A = (a_{ij})$ be a skew- symmetric matrix of order n ($A = (a_{ij})$ is a square matrix of order n such that $A = -A^T$.)

(a) Calculate $|A|$ for n = 2,3,4.

(b) Prove that $|A| = 0$ if n is an odd number.

Exercise 6. Let A be a matrix of order n. Using $|A|$, write $|adj(A)|$.

Solution

Exercise 1. The products ABC and CBA are not possibles, so the only possible product is BAC, and we have $B(AC) = (BA)C = \begin{bmatrix} 38 & 24 & 27 & 23 \\ 19 & 10 & 16 & 8 \\ 21 & 30 & -6 & 42 \end{bmatrix}$

Exercise 2.

a) $A^2 = A$ donne un système de quatre équations :

$$\begin{cases} a^2 + bc & = a \\ b(a+d) & = b \\ c(a+d) & = c \\ bc + d^2 & = d \end{cases}$$

Le système se résout en étudiant d'abord trois cas particuliers : $b = c = 0$; $b = 0, c \neq 0$; $b \neq 0, c = 0$. Quand on n'est pas dans ces cas, on peut se ramener aux équations $a^2 + bc = a$ et $a + d = 1$: les solutions sont de la forme : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \dfrac{a - a^2}{b} & 1 - a \end{pmatrix}$.

b) $A^2 = I_2$ donne un système de quatre équations :

$$\begin{cases} a^2 + bc & = 1 \\ b(a+d) & = 0 \\ c(a+d) & = 0 \\ bc + d^2 & = 1 \end{cases}$$

qui se résout en distinguant des cas particuliers comme ci-dessus. On trouve : $b = 0, c = 0, a = \pm 1, d = \pm 1$; $b = 0, c \neq 0, a = -d = \pm 1$; $a = -d,\ bc = 1 - a^2$, etc.

c) $AB = BA$ donne un système de 4 équations qui montre que les matrices commutant avec B sont de la forme : $\begin{pmatrix} b+d & b \\ -b & d \end{pmatrix}$

Exercise 3.

Par récurrence et après calcul de l'inverse de A, on trouve que, pour tout n de $\mathbb{Z}$: $A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$.

Exercise 4.

a) $A_1^{-1} = \dfrac{1}{22}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

Pour $ad - bc \neq 0$, A_2 est inversible et $A_2^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

b) $A_3^{-1} = \begin{pmatrix} -65 & 14 & 19 \\ 12 & -5/2 & -7/2 \\ -2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

La matrice A_4 n'est pas inversible.

c) La relation s'écrit : $A(\dfrac{1}{24}(A^2 - A - 5I)) = I$, ce qui donne

$A^{-1} = \dfrac{1}{24}(A^2 - A - 5I)$ d'où, après calculs, $A^{-1} = \dfrac{1}{24}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 8 \\ 4 & 4 & -8 \\ -2 & 10 & -8 \end{pmatrix}$.

Exercise 5.

a) La condition $a_{ii} = -a_{ii}$ implique que les coefficients diagonaux des matrices antisymétriques sont nuls.

On trouve $\begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix} = a^2$, $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$

$= a^2f^2 + b^2e^2 + c^2d^2 + 2acdf - 2abef - 2bcde$.

b) On a ${}^tA = -A$, donc dét $(A) =$ dét $({}^tA) =$ dét $(-A) = (-1)^n$ dét $(A) =$ – dét (A), la dernière égalité parce que n est impair. D'où dét $(A) = 0$.

Exercise 6.

On a $A^{-1} = \dfrac{1}{\text{dét}(A)}C$, d'où dét $(A^{-1}) = \dfrac{1}{(\text{dét}(A))^n}$ dét (C) ; on en déduit : dét $(C) = (\text{dét}\,(A))^{n-1}$.