Réponse الإجابة

الإجابة النموذجية لامتحان مادة الإحصاء 3 (2024/2023):

التمرين 1: 03,5 نقاط

1/ $\lambda = ?$

لدينا X يتبع توزيع بواسون: $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$ 0,5

$$P(X=x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

ولدينا: $2P(X=1) = P(X=2)$

$$2\left(\frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!}\right) = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} \Rightarrow 2\frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!} = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$$ 0,5

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = 4}$$ 0,5

2/ حساب الاحتمالات الطلوبة:

$P(X=2) = \frac{4^2 e^{-4}}{2!} = \boxed{0.1465}$ 0,5

$P(X<2) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{4^0 e^{-4}}{0!} + \frac{4 e^{-4}}{1!} = \boxed{0.0915}$ 0,5

3/ استخدام التقريب الطبيعي لحساب الاحتمالات السابقة

لدينا: $\lambda = 4$

حيث التقارب بين التوزيع الطبيعي وتوزيع بواسون عندما يكون $\lambda \geq 5$، وبما أن $\lambda = 4$ محصورة غير كافية لكي X يمكن حساب الاحتمالات الطلوبة باستخدام التقريب الطبيعي. 01

المجموع 20 نقاط

التمرين 02:

$X \sim \chi^2_{40}$

1) دالة التوزيع الاحتمالي للمتغيرة العشوائية X مع حساب المؤسط والتباين.

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) 2^{\frac{\nu}{2}}} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-x/2}$$ 01

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{40}{2}\right) 2^{\frac{40}{2}}} x^{\frac{40}{2}-1} e^{-x/2}$$

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(20)\, 2^{20}} x^{19} e^{-x/2}$$ 01

$E(X) = \mu = \nu = 40$; $V(X) = \sigma^2 = 2\nu = 80$ 0,5 0,5

2) التوزيع الاحتمالي للمتغيرة العشوائية X يتبع توزيع غاما.

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}$$ 1

توزيع مربع كاي هو عبارة عن حالة خاصة من توزيع غاما

بالمطابقة: $\alpha = \frac{\nu}{2}$ ، $\beta = 2$ 01

3) استخدام مبرهنة لابلاس لحساب $P(X \geq 24,43)$

- باستخدام المبرهنة المركزية: نحن بصدد التقارب بين التوزيع الطبيعي والتوزيع كاي مربع لما تكون درجة حرية التوزيع كاي مربع كبيرة، أي لما $\nu > 30$ وبما أننا هنا $\nu = 40$ وبالتالي نكون:

$$Z = \frac{X - \nu}{\sqrt{2\nu}} = \frac{X - 40}{\sqrt{80}}$$

$$P(X \geq 24,43) = P\left(Z \geq \frac{24,43 - 40}{\sqrt{80}}\right) = P(Z \geq -1,74)$$

$$= 1 - P(Z < -1,74)$$

$$= 1 - \Phi(-1,74) = \boxed{\quad}$$

التمرين 03: (9 نقاط)

I)

$$f(x,y) = q^2 p^{y-2}$$

$x = 1, 2, 3, \ldots \quad y = 1$

$y = 2, 3, 4, \ldots$

* نلاحظ أن $f(x,y) > 0$ من أجل جميع x, y

* من أجل المتغيرين نلاحظ أن x يبدأ من 1، و y يبدأ من $x+1$

وبالتالي:

$$\sum_{x=1}^{\infty} \sum_{y=x+1}^{\infty} f(x,y) = \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{y=x+1}^{\infty} q^2 p^{y-2}$$

$$= q^2 \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{y=x+1}^{\infty} p^{y-2} = q^2 \sum_{x=1}^{\infty} \left(p^{x-1} + p^{x} + p^{x+1} + \ldots\right)$$

$$= q(1-p) \sum_{x=1}^{\infty} \left(p^{x-1} + p^{x} + p^{x+1} + \ldots\right)$$

$$= q \sum_{x=1}^{\infty} p^{x-1} \cdot q \frac{1}{1-p} = 1$$

وبالتالي $f(x,y)$ دالة احتمالية.

ب) الدالة الاحتمالية الهامشية لكل من X و Y:

$$f(x) = \sum_{y=x+1}^{\infty} q^2 p^{y-2} = q^2 \sum_{y=x+1}^{\infty} p^{y-2} = q^2 \frac{p^{x-1}}{1-p} = q p^{x-1}$$

$f(x) = qp^{x-1}$ $x = 1, 2, \ldots$

ومنه السلسلة:

$$f(y) = q^2 \sum_{x=1}^{y-1} p^{y-2} = (y-1) q^2 p^{y-2}$$ (0,5) (0,5)

$f(y) = (y-1) q^2 p^{y-2}$ $y = 2, 3, 4, \ldots$

II

1) دالة الكثافة المشتركة لـ X, Y:

1) دوال الاحتمال الهامشية لـ X, Y:

x	-1	0	1	Σ
$f(x)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

(1)

y	-2	0	2	Σ
$f(y)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$	1

(1)

2) هل X, Y مستقلان ؟

X, Y مستقلان إذا تحقق: $f(x,y) = f(x) \cdot f(y)$ (0,5)

$f(-1, 2) \neq f(-1) \cdot f(-2)$ (0,5)

$\frac{2}{10} \neq (\frac{4}{10})(\frac{4}{10})$

إذن X, Y غير مستقلين.