Centre Universitaire de Mila - Institut des mathématiques et informatique
Master : Intelligence artificielle et ses applications - 1ière année
Matière : Modélisation et simulation – Année : 2023 – 2024
TP1

L'objectif de ce TP est de développer un programme en Python (ou en R) qui prend en entrée la matrice de transition P et une distribution initiale π_0 d'une chaîne de Markov, puis calcule et affiche les distributions de la chaîne de Markov sur un nombre d'étapes déterminé par l'utilisateur. Pour calculer les distributions (π_1, π_2, π_3 ...) à partir d'une distribution initiale π_0, il est possible d'utiliser la propriété :

$$\pi_{n+1} = \pi_n P$$

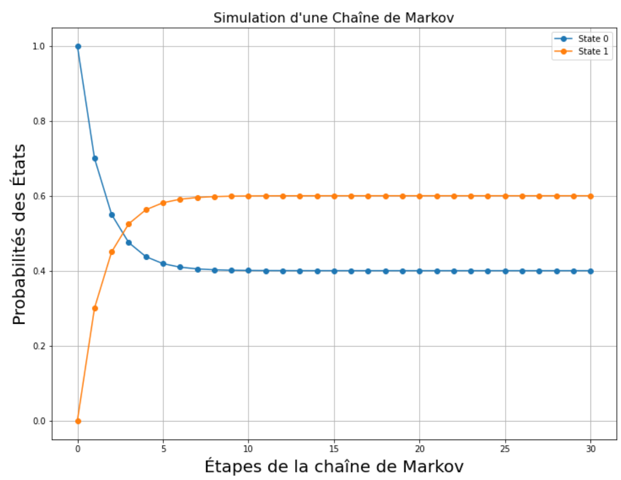
Soit la chaine de Markov dont la matrice de transitions :

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

1. Ecrire un programme qui calcule et affiche les distributions de probabilités de cette chaine de Markov sur 30 étapes.
2. Tester le programme pour la distribution initiale $\pi_0 = (1 \quad 0)$. Le résultat attendus:

```
Ditribution à l'étape 0 = [1.0, 0.0]
Ditribution à l'étape 1 = [0.7 0.3]
Ditribution à l'étape 2 = [0.55 0.45]
Ditribution à l'étape 3 = [0.475 0.525]
...
Ditribution à l'étape 30 = [0.4 0.6]
```

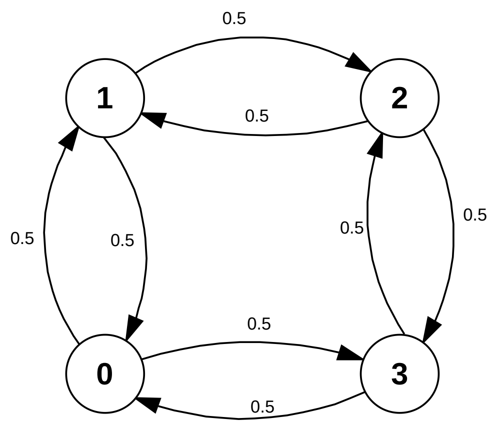
3. Refaire le test pour d'autres distributions initiales. Que constater vous ?
4. Modifier le programme pour afficher l'évolution des probabilités des états en fonction du temps.
   Le graphe à obtenir pour la distribution initiale $\pi_0 = (1 \quad 0)$:



5. Adaptez le programme pour calculer et afficher les distributions de probabilités en fonction du temps pour n'importe quelle chaîne de Markov donnée.
6. Considérons la chaine de Markov de l'exercice 4 de la série de TD. Exécuter le programme pour différentes distributions initiales. Que constatez-vous ?

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S & M & I \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.95 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0.90 & 0.10 \\ 0.02 & 0 & 0.98 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} S \\ M \\ I \end{array}$$

7. Considérons la chaine de Markov de dont le graphe de transitions est donné ci-dessous.



- Etablir la matrice de transition de cette chaine de Markov
- Exécuter le programme pour la distribution initiale $\pi_0 = (0.25 \quad 0.25 \quad 0.25 \quad 0.25)$. Que constatez-vous ?
- Exécuter le programme pour différentes distributions.

Exemples

$\pi_0 = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$

$\pi_0 = (0.5 \quad 0 \quad 0.5 \quad 0)$

...

$\pi_0 = (0.35 \quad 0.20 \quad 0.15 \quad 0.30)$

- Quelle différence par rapport à la chaine de Markov précédente ?