Vibrations physiques

Serradj Ismahane

Départment of S. T

Abdelhafid Boussouf university center

PARTIE 1

systèmes un degré de liberté

Chapitre 1

Concepts fondamentaux sur les vibrations

Méthodes et théorèmes de calculs

Le principe de base de l'animation

Mouvement rotatif

$$\sum \vec{M} = J\,\vec{\ddot{\theta}}$$

Mouvement de retrait

$$\sum \vec{F} = m\,\vec{\gamma}$$

rotation	retrait
$\vec{M}$	$\vec{F}$
J	m
$\ddot{\theta}$	γ

Méthode énergétique

Lés systèmes conservateurs

$$\boxed{E_T = E_C + E_p = Cte}$$

$$\boxed{\frac{dE_T}{dt} = 0}$$

Méthode de Lagrange
Lagrange Method

Fonction de Lagrange

L = T - V

Énergie cinétique de le systèmes T : $T = \frac{1}{2} m\dot{q}^2 \ or \ = \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2$

L'énergie potentielle de le systèmes U: $V = \frac{1}{2} kq^2$

équations de Lagrange

le systèmes d'amortissement forcé	le systèmes amortie	le systèmes conservatrice
$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = F_e$	$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = 0$	$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$

Newton « Des vitesses élevées

Frottement / Friction

fluide visqueux

« coulomb » en acier

Newton « Des vitesses élevées»

Stokes "basse vitesse"

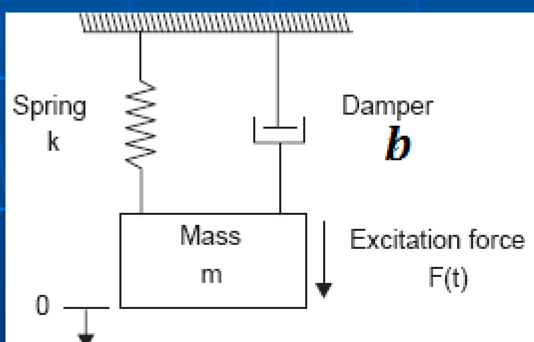
$$F_f = -bv^2$$

$$F_f = -bv$$

$$F_f = -\mu N$$

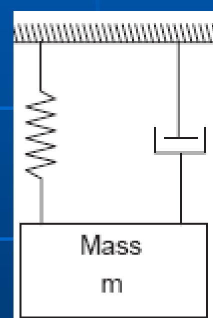
Systèmes à un degré de liberté

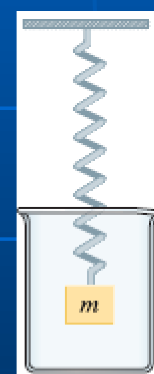
Vibrateurs forcés



$$\ddot{q} + 2\alpha\dot{q} + \omega_0^2 q = F_{e/m}$$

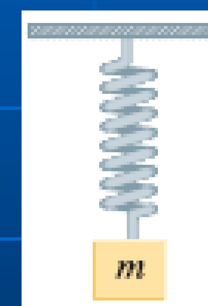
Le vibrateur amorti





$$\ddot{q} + 2\alpha\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

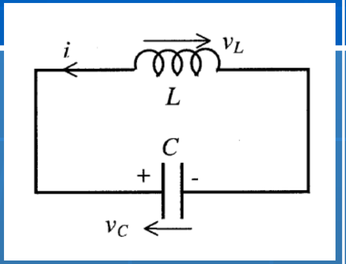
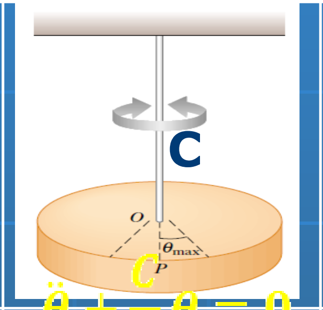
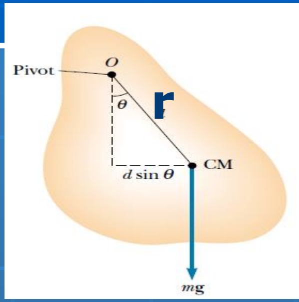
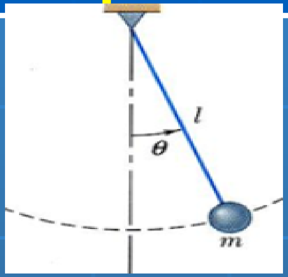
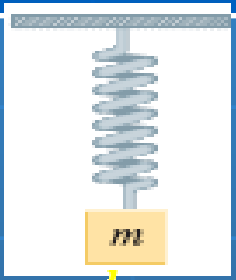
Vibrateur harmonique



$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

Chapitre II

Vibrations libres non amorties

Vibrations Electrique	Pendule de torsion	Pendule Mecanique	Pendule simple	Masse ressort
				
$\ddot{q}+\frac{1}{LC}q=0$	$\ddot{\theta}+\frac{C}{J}\theta=0$	$\ddot{\theta}+\frac{mgr}{J}\theta=0$	$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0$	$\ddot{y}+\frac{k}{m}y=0$
$\omega_0^2=\frac{1}{LC}$	$\omega_0^2=\frac{C}{J}$	$\omega_0^2=\frac{mgr}{J}$	$\omega_0^2=\frac{g}{l}$	$\omega_0^2=\frac{k}{m}$
$T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{LC}$	$T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{J}{C}}$	$T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{J}{mgr}}$	$T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$	$T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}=2\pi f_0$$

كل الجمل تخضع لمعادلة من الشكل:

$$\ddot{q}+\omega_0^2q=0$$

$$q(t)=a\cos\omega_0 t+b\sin\omega_0 t=A\cos(\omega_0 t+\varphi)=B\sin(\omega_0 t+\varphi)$$

Les deux constantes (a, b) ou (A, φ) ou (B, φ) sont appelées constantes d'intégration ou constantes de solution Ils déduisent en substituant les conditions initiales dans mon expression homogène $q(t) = Acos(\omega_0 t + \varphi)$

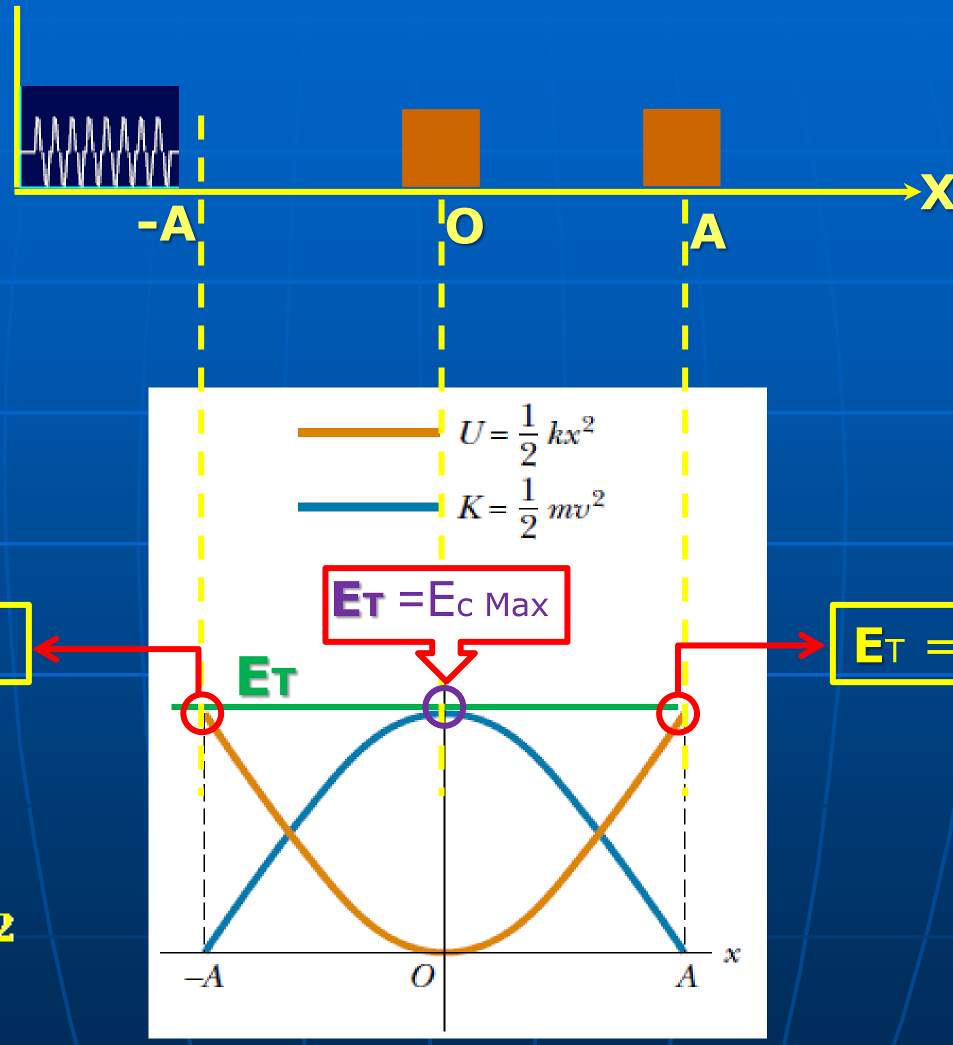
Propriétés de la solution ou équation temporelle du mouvement :

Symbol	Name $\dot{q}(t)$ و $q(t)$	SI unit
A	amplitude السعة	m
ω_0	angular frequency النبض الذاتي " الطبيعي "	s^{-1} (or $rad.s^{-1}$)
$\omega_0 t + \phi$	phase الطور	no unit (or rad)
ϕ	initial phase (i.e. phase at $t = 0$)	no unit (or rad)
T_0	period الدور	s
f_0	frequency التردد / التواتر	Hz

Caractéristiques cinétiques

De Max valeurs	Valeurs instantanées	Montant
$\lvert V_{Max}\rvert = A\omega_0$	$\dot{q}(t) = -A\omega_0 sin(\omega_0 t + \varphi)$	la vitesse
$\lvert \gamma_{Max}\rvert = A\omega_0^2$	$\ddot{q}(t) = -A\omega_0^2 cos(\omega_0 t + \varphi)$	Accélération

Échange d'énergie



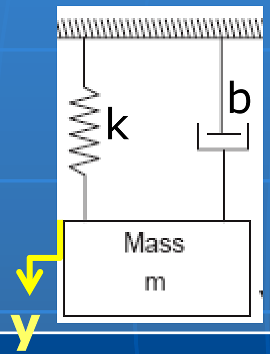
ET = EpMax

ET = EpMax

$$E_{pMax} = \frac{1}{2}kA^2$$

$$E_{cMax} = \frac{1}{2}mV^2_{Max} = \frac{1}{2}m(A\omega_0)^2$$

Vibrations libres amorties

Système	Les équations	
	$\ddot{y}+\frac{b}{m}\dot{y}+\frac{k}{m}y=0$ $\ddot{y}+2\alpha\dot{y}+\omega_0^2 y=0$	
$2\alpha=\frac{b}{m}=\frac{1}{\tau}=\frac{\omega_0}{Q}$	$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$	Mécanique

l'équation caractéristique

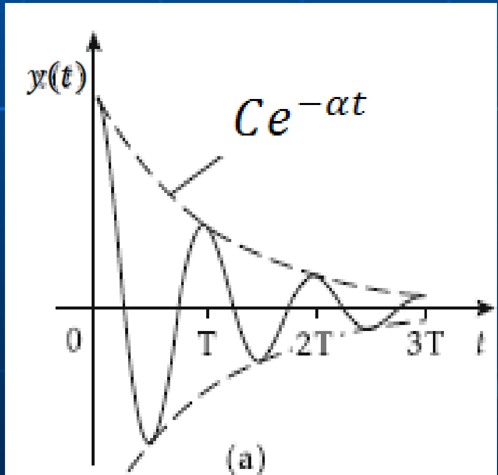
$$r^2 + 2\alpha r + \omega_0^2 = 0$$

Déterminant de l'équation caractéristique :

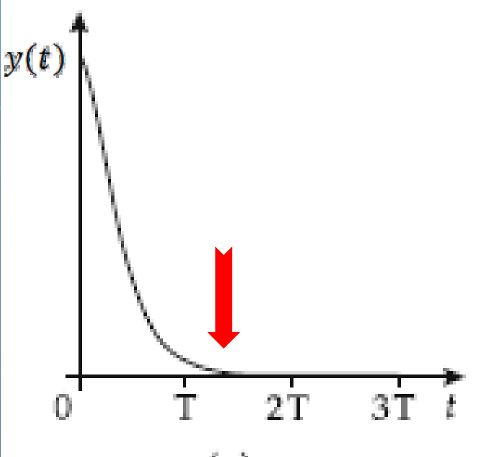
$$\boxed{\Delta' = \alpha^2 - \omega_0^2}$$

Équation temporelle du mouvement :

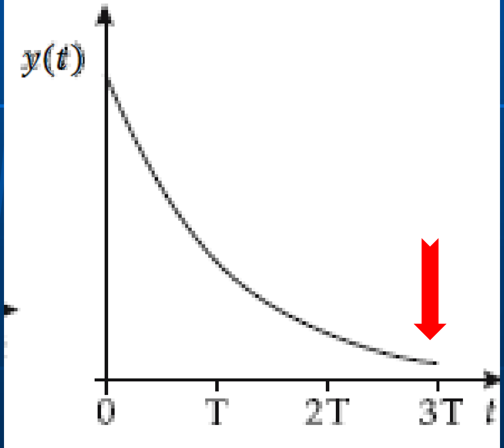
$\Delta' < 0, \alpha < \omega_0, Q > \frac{1}{2}$	$\Delta' = 0, \alpha = \omega_0, Q = \frac{1}{2}$	$\Delta' > 0, \alpha > \omega_0, Q < \frac{1}{2}$
Système semi-périodique	**Système critique**	**Système apériodique**
$y(t) = Ce^{-\alpha t}\cos(\omega t + \varphi)$	$y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\alpha t}$	$y(t) = e^{-\alpha t}(C_1 e^{-\omega t} + C_2 e^{\omega t})$



(a)



(c)



(b)

Caractéristiques du système sem-périodique

le battement naturel du mouvement

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \qquad \omega = \omega_0\sqrt{1-\left(\frac{1}{2Q}\right)^2}$$

la période naturelle du mouvement

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\left(\frac{1}{2Q}\right)^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2Q}\right)^2}}$$

$$\boxed{T > T_0}$$

Décrément logarithmique

$$\delta = ln\frac{y(t)}{y(t+T)} = \alpha T = \frac{\alpha T_0}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2Q}\right)^2}}$$

L'énergie dans un vibrateur amorti:

$$E_T = \frac{1}{2}ky_M^2 = \frac{1}{2}kC^2e^{-2\alpha t}$$

Chapitre 3
Oscillateur forcé / Forced Oscillator

Le vibrateur amorti

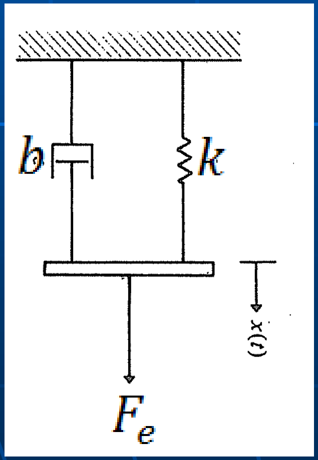
$F_e = F_0 cos\omega_e t$

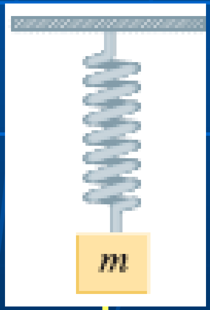
$F_e = F_0$

Vibrateur harmonique

$F_e = F_0 cos\omega_e t$

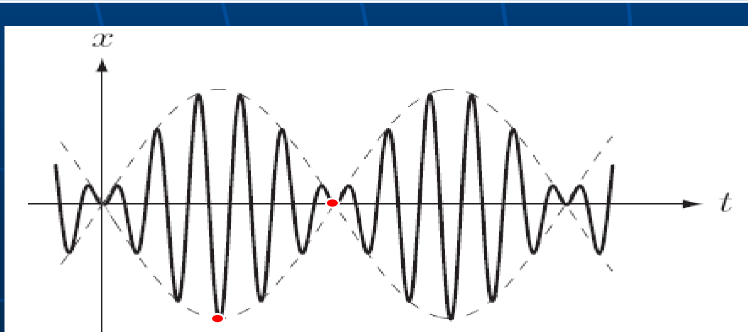
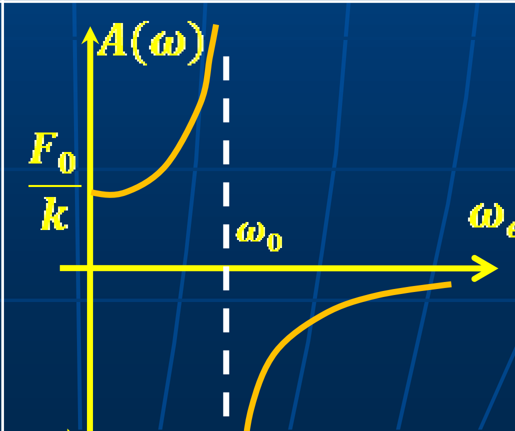
$F_e = F_0$



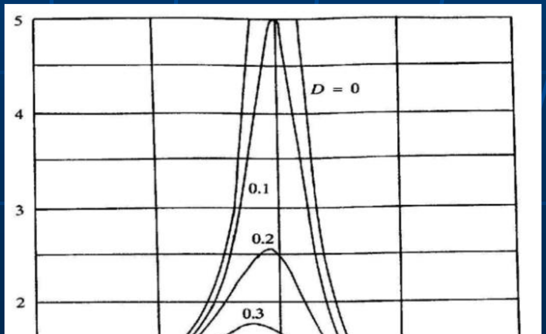


F_e

Vibrations forcées des systèmes à un degré de liberté

Excitation sinusoïdale	Excitation constante	
$F_e = F_0 cos\omega_e t$	$F_e = F_0$	Le système de l'excitation
$\ddot{y} + \omega_0^2 y = \dfrac{F_0 cos\omega_e t}{m}$	$\ddot{y} + \omega_0^2 y = \dfrac{F_0}{m}$	Equation différentielle
$y(t) = y_H(t) + y_P(t)$ $y(t) = \dfrac{F_0/k}{1-\left(\dfrac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2}[cosw_e t - cosw_0 t]$ **1.Beats/ battements**	$y(t) = y_H(t) + y_P(t)$ $y(t) = \dfrac{F_0}{k}(1 - cos\omega_0 t)$	**Equations du mouvement**
 . .1 2Résonance .2		phénomènes d'accompagnement

Excitation harmonique d'un système amortie.

L'excitation harmonique	Excitation Constante	
$F_e = F_0 cos\omega_e t$	$F_e = F_0$	système d'excitation
$\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{F_0 cos\omega_e t}{m}$	$\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m}$	Equation différentielle
$y(t) = y_H(t) + y_P(t)$ $y(t) = Ce^{-\alpha t}cos(\omega t + \varphi) + Bcos(\omega_e t + \theta)$	$y(t) = y_H(t) + y_P(t)$ $y(t) = Ce^{-\alpha t}cos(\omega t + \varphi) + C_p \quad ; C_p = F_0/k$	Equations des mouvements
➢ بعد فترة زمنية يزول الحل المتجانس (الحل العابر) ، و يبقى الحل الخاص (الحل الدائم) ➢رنين السعة $B = \frac{F_0/m}{\sqrt{\ldots}}$		phénomènes d'accompagnement

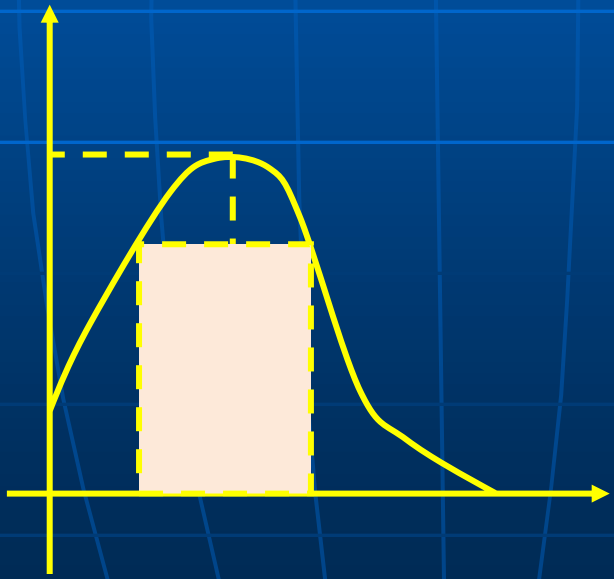
le battement de résonance

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q^2}\right)}$$

La condition de son existence

$$1 - \left(\frac{1}{2Q^2}\right) > 0 \Rightarrow Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Bande passante



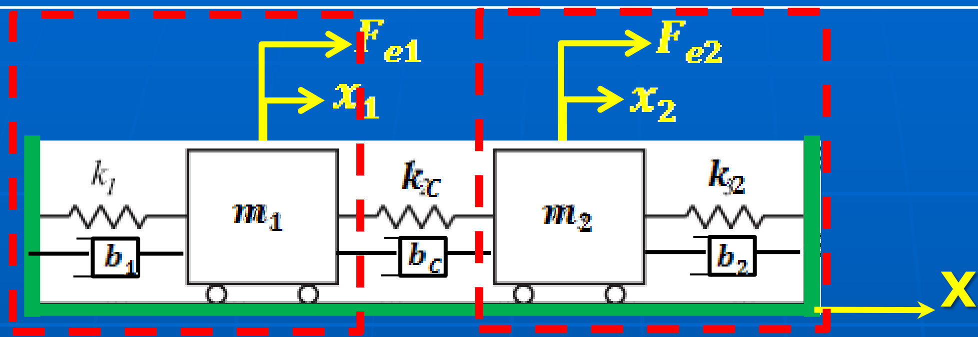
Chapitre 4

Vibrations des systèmes à deux degrés de liberté

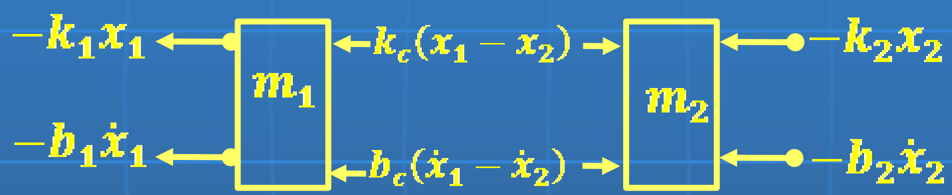
Règles du compte

systèmes à plusieurs degrés de liberté	systèmes à un degré de liberté	Les systèmes	
$\sum_{i}^{n} \vec{F}_i = m_i \vec{\gamma}_i, i = 1, n$	$\sum \vec{F} = m\vec{\gamma}$	**Système retrait**	La méthode de Newton
$\sum_{i}^{n} \vec{M}_i = J_i \vec{\ddot{\theta}}_i, i = 1, n$	$\sum \vec{M} = J\vec{\ddot{\theta}}$	système de rotation	
$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$	$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$	Système libre	Méthode de Lagrange
$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = 0$	$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = 0$	Système libre amortie	
$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = F_{ei}$	$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = F_e$	Système forcé	

Situation générale



Le système



- masse1: $\sum_{i}^{n} \vec{F}_i = m_1\vec{\gamma}_1$

$$m_1\ddot{x}_1 + (b_1 + b_c)\dot{x}_1 - b_c\dot{x}_2 + (k_1 + k_c)x_1 - k_cx_2 = F_{e1}$$

- masse2: $\sum_{i}^{n} \vec{F}_i = m_2\vec{\gamma}_2$

$$m_2\ddot{x}_2 + (b_2 + b_c)\dot{x}_2 - b_c\dot{x}_1 + (k_2 + k_c)x_2 - k_cx_1 = F_{e2}$$

l'équation différentielle
(P. F. D)

L'énergie cinétique du système:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

:L'énergie potentielle du système

$$V = V_1 + V_c + V_2 = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_c (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2$$

Le Lagrangien du système : $L = T - V$

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k_1 x_1^2 - \frac{1}{2} k_c (x_1 - x_2)^2 - \frac{1}{2} k_2 x_2^2$$

la fonction de dissipation :

$$D = D_1 + D_c + D_2 = \frac{1}{2} b_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} b_c (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2} b_2 \dot{x}_2^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = F_{e1}$$

- masse1:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (b_1 + b_c)\dot{x}_1 - b_c \dot{x}_2 + (k_1 + k_c) x_1 - k_c x_2 = F_{e1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} = F_{e2}$$

- masse2:

$$m_2 \ddot{x}_2 + (b_2 + b_c)\dot{x}_2 - b_c \dot{x}_1 + (k_2 + k_c) x_2 - k_c x_1 = F_{e2}$$

l'équation différentielle

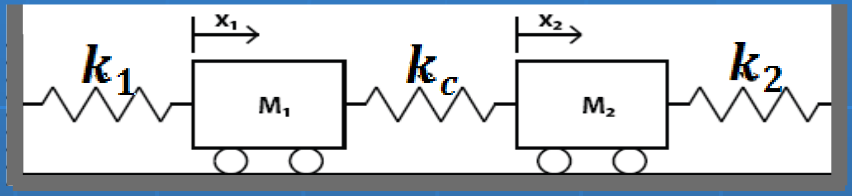
Méthode de) (
Lagrange

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 + b_c & -b_c \\ -b_c & b_2 + b_c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_c & -k_c \\ -k_c & k_2 + k_c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{e1} \\ F_{e2} \end{bmatrix}$$

$$[M][\ddot{X}] + [B][\dot{X}] + [K][X] = [F_e]$$

l'équation différentielle
La matrice

Cas spéciaux



$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_c & -k_c \\ -k_c & k_2 + k_c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[M][\ddot{X}] + [K][X] = [0]$$

Système libres non amorties

$$(F_{e1} = F_{e2} = 0)$$

$$(b_1 = b_2 = b_c = 0)$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k + k_c & -k_c \\ -k_c & k + k_c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Système symétrique

$$(m_1 = m_2 = m)$$

$$(k_1 = k_2 = k)$$

Etude de cas particulier : **Système symétrique**

1.l’équation différentielle

$$m_1: \quad m \ddot{x}_1 + (k + k_c)x_1 - k_c x_2 = 0 \qquad 1$$

$$m_2: \quad m \ddot{x}_2 + (k + k_c)x_2 - k_c x_1 = 0 \qquad 2$$

2.Les battement naturelle

:nous mettons $S = x_1 + x_2$ $D = x_1 - x_2$

بجمع المعادلتين 1 و 2 نجد:

$$m\ddot{S} + kS = 0 \Leftrightarrow \ddot{S} + \frac{k}{m}S = 0$$

$$\boxed{\omega_{01} = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

بطرح المعادلتين 1 و 2 نجد:

$$m\ddot{D} + (k + 2k_c)D = 0 \Leftrightarrow \ddot{D} + \left(\frac{k + 2k_c}{m}\right)D = 0$$

$$\boxed{\omega_{02} = \sqrt{\frac{k + 2k_c}{m}}}$$

3. الأنماط الذاتية للحركة

3. 1. النمط الإهتزازي الأول:

من أجل النبض $\omega_{01} = \sqrt{\frac{k_c}{m}}$ نجد $\frac{A_1}{A_2} = 1$

- أي أن للكتلتين نفس السعة و تهتزان على توافق

3. 1. النمط الإهتزازي الثاني

من أجل النبض $\omega_{02} = \sqrt{\frac{3k_c}{m}}$ نجد $\frac{A_1}{A_2} = -1$

- أي أن للكتلتين نفس السعة و تهتزان على تعاكس