II. التوزيعات الاحتمالية المستمرة:

- يكون للمتغيرين العشوائيين المستمرين X,Y توزيع احتمالي مشترك دالة كثافته الاحتمالية المشتركة هي $f(x,y)$ إذا حققت الشروط التالية:

$$f(x,y) \geq 0 \text{ لجميع قيم } x,y$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$$

- تعطى دالة التوزيع التجميعية (التراكمية) المشتركة بين المتغيرين العشوائيين المستمرين x,y كمايلي:

$$F(a,b) = p[X \leq a \,, Y \leq b] = \int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{b} f(x,y)dxdy$$

- **التوزيعات الاحتمالية الهامشية:**

إذا كان X,Y متغيرين عشوائيين لهما توزيع مشترك من النوع المستمر، فإن:

- دالة الكثافة الاحتمالية الهامشية للمتغير X نحصل عليها بالشكل التالي:

$$f(x) = F^{`}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

- دالة الكثافة الاحتمالية الهامشية للمتغير Y نحصل عليها بالشكل التالي:

$$f(y) = F^{`}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

- **التوزيعات الاحتمالية المشروطة:**

الدوال الاحتمالية المشروطة تحقق جميع شروط التوزيع الاحتمالي العادي:

$$f(X\,/\,Y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(X\,/\,Y) = \frac{1}{f(y)}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

III. خصائص المتغيرات العشوائية المزدوجة المنقطعة والمستمرة:

1- التوقع الرياضي:

- $E(X.Y) = \begin{cases} \sum_x \sum_y x.y\, f(x,y) & , \text{منقطع } (X,Y) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x.y\, f(x,y) dx\, dy & , \text{مستمر } (X,Y) \end{cases}$

2- التباين:

- $V(X \pm Y) = V(X) + V(Y) \pm 2\, COV(X,Y)$

3- التباين المشترك:

- $COV(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
- $COV(X,X) = V(X)$
- $COV(X,X) = 0$ عندما يكون X,Y مستقلان عشوائيا
- $COV(aX+b, cY+d) = a.c\; Cov(X,Y)$

4- معامل الارتباط:

- $\rho(X,Y) = \frac{COV(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \sigma_Y}$

عندما يكون X,Y مستقلان عشوائيا فإن: $\rho(X,Y) = 0$ لأنّ: $COV(X,Y) = 0$

- $\rho(aX+b, cY+d) = \begin{cases} \rho(X,Y) & , ac > 0 \\ -\rho(X,Y) & , ac < 0 \end{cases}$