الفصل الثالث:
مقاييس النزعة المركزية

1- الوسط الحسابي $\bar{X}$.

2- الوسيط Me.

3- المنوال Mo.

4- الوسط الهندسي G.

5- الوسط التوافقي H.

6- الوسط التربيعي MQ.

7- علاقات رياضية تربط بين مقاييس النزعة المركزية.

✓ تمـــارين محلـولـــة.

يقصد بمقاييس النزعة المركزية، هي التعبير عن مجموع القيم (تلخيصها) من خلال قيمة (أو أكثر أحيانا) معينة، أي وكأن جميع القيم لها توجه ونزعة للتمركز حول قيمة معينة تعبر عنها، فمثلا القيمة التي هي متوسط جميع القيم تسمى المتوسط الحسابي، القيم التي تقسم القيم إلى قسمين متساويين تسمى الوسيط،...الخ.

1- الوسط الحسابي $\bar{X}$: ويسمى أيضا المتوسط الحسابي، هو القيمة التي تعتبر كمتوسط لجميع القيم.

1-1- البيانات غير المبوبة: في هذه الحالة تكون البيانات غير منظمة (غير مبوبة) في جدول تكراري، ويسمى الوسط الحسابي بالوسط الحسابي البسيط، ويحسب كالآتي:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i)}{n}$$

مثال (3-1): قمنا بإحصاء عدد الأطفال في 20 عائلة، وكانت النتائج كالآتي:

01	04	05	03	04	03	01	00	02	00
03	05	01	01	03	01	03	03	04	02

المطلوب: أحسب الوسط الحسابي؟

الحل:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i)}{n} = \frac{49}{20} = 2{,}45$$

1-2- البيانات المبوبة: في هذه الحالة تكون البيانات منظمة (مبوبة) في جدول تكراري، ويسمى الوسط الحسابي بالوسط الحسابي المرجح، ويحسب كالآتي:

أ- الطريقة المباشرة (طريقة القانون العام):

- في حالة المتغير الإحصائي المتصل:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(F_i.c_i)}{\sum F_i} = \sum_{i=1}^{n}(Fr_i.c_i)$$

- في حالة المتغير الاحصائي المنفصل:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(F_i.x_i)}{\sum F_i} = \sum_{i=1}^{n}(Fr_i.x_i)$$

ب- الطريقة غير المباشرة: وتتضمن طريقتين كالآتي:

- طريقة الوسط الفرضي (طريقة الانحرافات):

$$\bar{X} = \alpha + \frac{\sum_{i=1}^{n}(F_i.w_i)}{\sum F_i}$$

حيث: $w_i = c_i - \alpha$ (أو $w_i = x_i - \alpha$ في حالة المتغير المنفصل)

α: هو الوسط الفرضي، اذا تم اختيار أي قيمة له فإن النتيجة تكون صحيحة، لكن في الغالب يتم اختياره على أنه مركز الفئة (أو قيمة x_i في حالة المتغير المنفصل) المقابل لأكبر تكرار، وهذا من أجل توحيد طريقة الحل فقط.

– طريقة الانحرافات المختصرة:

$$\bar{X} = \alpha + \frac{\sum_{i=1}^{n}(F_i.\grave{w}_i)}{\sum F_i}.K$$

حيث: $\grave{w}_i = \frac{w_i}{K}$

K: مهما كانت قيمته فالنتيجة ستكون نفسها، لكن في حالة المتغير المتصل، ومن أجل توحيد طريقة الحل، فيمكن مثلا اعتباره بأنه طول الفئة في حالة تساوي طول الفئات، أو طول الفئة لأكبر في حالة عدم تساوي طول الفئات.

مثال (3–2) (حالة متغير متصل): ليكن لدينا مجموعة من الأشخاص، موزعين حسب أوزانهم كالآتي:

الفئات (الأوزان)	[50-60[	[60-70[	[70-80[	[80-90[	[90-100[
عدد الأشخاص (التكرار) (F_i)	8	15	16	24	12

– المطلوب: حساب الوسط الحسابي ($\bar{X}$) بالطرق الثلاث: الطريقة المباشرة، طريقة الوسط الفرضي وطريقة الانحرافات المختصرة؟

الحل:

الفئات	[50-60[	[60-70[	[70-80[	[80-90[	[90-100[	Σ
c_i	55	65	75	85	95	//
F_i	8	15	16	24	12	75
$F_i.c_i$	440	975	1200	2040	1140	5795
w_i	-30	-20	-10	00	10	//
$F_i.w_i$	-240	-300	-160	00	120	-580
$\grave{w}_i$	-3	-2	-1	00	1	//
$F_i.\grave{w}_i$	-24	-30	-16	00	12	-58

– **حساب الوسط الحسابي بالطريقة المباشرة:** $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(F_i.c_i)}{\sum F_i} = \frac{5795}{75} \approx 77,27$

– **حساب الوسط الحسابي بالطريقة الوسط الفرضي:** نلاحظ أن أكبر تكرار هو 24، ويقابله مركز الفئة c=85، إذن نختار الوسط الفرضي $\alpha = 85$، إذن يكون:

$$\bar{X} = \alpha + \frac{\sum_{i=1}^{n}(F_i.w_i)}{\sum F_i} = 85 + \frac{(-580)}{75} = 85 - 07,733 \approx 77,27$$

– **حساب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة:** بما أن أطوال الفئات متساوية، إذن K=10،

ومنه يكون: $\bar{X} = \alpha + \frac{\sum_{i=}^{n}(F_i.\grave{w}_i)}{\sum F_i}.K = 85 + \frac{(-58)}{75}.10 \approx 77,27$

مثال (3–3) (حالة متغير منفصل): ليكن لدينا توزيع مجموعة من الأسر حسب عدد الأطفال، مبينة كما في جدول التوزيع التكراري الآتي:

عدد الأطفال (صفة كمية منفصلة)	01	02	03	04	05
عدد الأسر (F_i)	05	10	15	14	06

– **المطلوب:** حساب الوسط الحسابي $(\bar{X})$ بالطرق الثلاث: الطريقة المباشرة، طريقة الوسط الفرضي وطريقة الانحرافات المختصرة؟

الحل:

x_i	01	02	03	04	05	Σ
F_i	05	10	15	14	06	50
$F_i.x_i$	05	20	45	56	30	156
w_i	-02	-01	00	01	02	//
$F_i.w_i$	-10	-10	00	14	12	06
$\grave{w}_i$	-01	-00,50	00	00,50	01	//
$F_i.\grave{w}_i$	-05	-05	00	07	06	03

– **حساب الوسط الحسابي بالطريقة المباشرة:** $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(F_i.x_i)}{\sum F_i} = \frac{156}{50} = 03,12$

– **حساب الوسط الحسابي بالطريقة الوسط الفرضي:** نلاحظ أن أكبر تكرار هو 15، ويقابله x_i=03، إذن نختار الوسط الفرضي $\alpha = 03$، إذن يكون:

$$\bar{X} = \alpha + \frac{\sum_{i=1}^{n}(F_i.w_i)}{\sum F_i} = 03 + \frac{6}{50} = 03 + 00,12 = 03,12$$

– **حساب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة**: بما أن في هذه الحالة المتغير منفصل؛ إذ يتضمن قيم منفصلة (وليس فئات)، إذن نختار أي قيمة لـ K، فمثلا نختار K=02، ومنه يكون:

$$\bar{X} = \alpha + \frac{\sum_{i=1}^{n}(F_i.\dot{w}_i)}{\sum F_i}.K = 03 + \frac{03}{50}.02 = 03,12$$

2– الوسيط *Me*: وهو القيمة التي تقسم السلسلة إلى قسمين متساويين (أي كل قسم يتضمن نفس العدد من القيم)، قسم أكبر من هذه القيمة وقسم أقل منها؛ أي 50% من قيم السلسلة أقل من قيمة الوسيط و50% من قيم السلسلة أكبر من قيمة الوسيط.

2–1 – حالة البيانات غير المبوبة: ترتب البيانات تصاعديا أو تنازليا، ثم نحسب رتبة الوسيط (***Rme***)، وهنا نميز بين حالتين:

أ– إذا كان n (عدد البيانات) فرديا، فإن: $Rme = \frac{n+1}{2}$، وبالتالي يكون الوسيط Me هو القيمة من قيم البيانات التي ترتيبها $Rme = \frac{n+1}{2}$؛ أي: $Me = x_{\frac{n+1}{2}}$

ب– إذا كان n زوجيا، فإنه الوسيط Me هو متوسط لقيمتين من قيم البيانات، حيث القيمة الأولى نعتبرها كأنها وسيط أول، ونرمز له بـ $Me1$ ورتبته $Rme1 = \frac{n}{2}$، والقيمة الثانية نعتبرها كأنها وسيط ثاني، ونرمز له بـ $Me2$ ورتبته $Rme2 = \frac{n}{2} + 1$

وبالتالي تكون قيمة الوسيط Me هي: $Me = \frac{Me1+Me2}{2}$

مثال (3–4) (حالة n عدد زوجي): قمنا بإحصاء عدد الأطفال في 20 عائلة، وكانت النتائج كالآتي:

01	04	05	03	04	03	01	00	02	00
03	05	01	01	03	01	03	03	04	02

المطلوب: أحسب الوسيط؟

الحل:

أولا نقوم بترتيب البيانات تصاعديا كالآتي:

00	00	01	01	01	01	01	02	02	03
03	03	03	03	03	04	04	04	05	05

نلاحظ أن عدد البيانات n=20 زوجيا، وبالتالي *Me1* رتبته $Rme1=\frac{n}{2}=\frac{20}{2}=10$،

ونلاحظ أن القيمة التي رتبتها 10 هي $x_{10}=03$، إذن *Me1*=03، أما Me2 رتبته هي

$Rme2=\frac{n}{2}+1=\frac{20}{2}+1=11$، ومن الجدول نلاحظ أن القيمة التي رتبتها 11 هي كذلك

$x_{11}=03$، إذن *Me2*=03، إذن قيمة الوسيط Me هي: $Me=\frac{Me1+Me2}{2}=\frac{3+3}{2}=3$

مثال (3-5) (حالة n عدد فردي): قمنا بإحصاء عدد الأطفال في 09 عائلات، وكانت النتائج كالآتي:

02	01	05	05	04	03	04	04	01

المطلوب: حساب الوسيط؟

الحل:

أولا نقوم بترتيب البيانات تصاعديا كالآتي:

01	01	02	03	04	04	04	05	05

نلاحظ أن عدد البيانات n=09 فرديا، وبالتالي رتبة الوسيط هي $Rme=\frac{n+1}{2}=\frac{09+1}{2}=05$،

ونلاحظ أن القيمة التي رتبتها 05 هي $x_i=04$، إذن *Me*=04

2-2- حالة البيانات المبوبة:

2-2-1- المتغير المتصل:

$$Me=L_0+\frac{\frac{\sum F_i}{2}-Fcc_1}{Fcc_2-Fcc_1}\times$$

K: هو طول الفئة التي ينتمي إليها الوسيط (فئة الوسيط)

L_0: الحد الأول لفئة الوسيط

Fcc1: هي قيمة *Fcc* التي هي أقل من القيمة $\frac{\sum F_i}{2}$

Fcc2: هي قيمة *Fcc* التي هي أكبر من القيمة $\frac{\sum F_i}{2}$

إذا كانت القيمة $\frac{\sum F_i}{2}$ هي إحدى قيم التكرار المتجمع الصاعد، فإن قيمة الوسيط تحدد مباشرة؛ وهي قيمة الحد الأعلى للفئة التي هي قبل العمود الذي يتضمن القيمة $\frac{\sum F_i}{2}$ (وهي نفسها الحد الأدنى للفئة التي بعد العمود).

مثال (3−6): ليكن لدينا مجموعة من الأشخاص، موزعين حسب أوزانهم كالآتي:

[90−100[	[80−90[	[70−80[	[60−70[	[50−60[	الفئات (الأوزان)
12	24	16	15	8	عدد الأشخاص (التكرار F_i)

− **المطلوب**: حساب الوسيط؟

الحل:

− **أولا**: **ايجاد فئة الوسيط**: نقوم بإيجاد قيم التكرار المتجمع الصاعد كالآتي:

Σ		[90−100[		[80−90[		[70−80[		[60−70[		[50−60[		الفئات
75		12		24		16		15		8		F_i
	75		63		39		23		8		0	*Fcc*

لدينا: $37,5 = \frac{75}{2} = \frac{\sum F_i}{2}$، ونلاحظ أن القيمة 37,5 تقع بين القيمتين *Fcc*=23 و*Fcc*=39،

إذن الفئة التي ينتمي إليها الوسيط هي [70−80[، ثم نقوم بتطبيق القانون على هذه الفئة لتحديد قيمة الوسيط بالضبط، ولمعرفة أي قيمة من هذه الفئة هي الوسيط، وذلك كالآتي:

$$Me = L_0 + \frac{\frac{\sum F_i}{2} - Fcc_1}{Fcc_2 - Fcc_1} \times K = 70 + \frac{37,5 - 23}{39 - 23}.10 = 79,0625$$

مثال (3−7) (حالة $\frac{\sum F_i}{2}$ تقع ضمن قيم *Fcc*): لدينا مجموعة من الأشخاص، موزعين حسب أوزانهم كالآتي:

[90−100[	[80−90[	[70−80[	[60−70[	[50−60[	الفئات (الأوزان)
14	25	16	15	8	عدد الأشخاص (التكرار F_i)

− **المطلوب**: حساب الوسيط؟

الحل:

- أولا نقوم بإيجاد فئة الوسيط، وذلك بإيجاد قيم التكرار المتجمع الصاعد كالآتي:

الفئات		[50-60[		[60-70[		[70-80[		[80-90[		[90-100[		Σ
F_i		8		15		16		25		14		78
Fcc	0		8		23		39		64		78	

لدينا: $\frac{\sum F_i}{2} = \frac{78}{2} = 39$، نلاحظ أن القيمة 39 تقع ضمن قيم Fcc، إذن مباشرة (وبدون الحاجة إلى تطبيق القانون) فإن الوسيط هو Me=80؛ أي هو الحد الأعلى للفئة التي قبل]70-80] (أو الحد الأدنى للفئة التي بعد]80-90])، وإذا قمنا بتطبيق القانون على الفئة]70-80] سنجد نفس النتيجة، وذلك كالآتي:

$$Me = L_0 + \frac{\frac{\sum F_i}{2} - Fcc_1}{Fcc_2 - Fcc_1} \times K = 70 + \frac{39-23}{39-23} . 10 = 80$$

2-2-2- المتغير المنفصل:

إذا كانت رتبة الوسيط $Rme = \frac{\sum F_i}{2}$ مساوية لإحدى قيم Fcc، فإن الوسيط Me هو متوسط قيمتي (x_i) قبل وبعد السطر المتضمن رتبة الوسيط؛ وهذا في حالة رسم جدول Fcc بطريقة ترك أسطر فراغة بين قيم (x_i)، أما اذا رسمنا الجدول بطريقة عدم ترك الأسطر الفارغة فإن الوسيط هو متوسط قيمتي (x_i) اللتين تقعان ضمن وبعد السطر المتضمن رتبة الوسيط.

أما إذا كانت رتبة الوسيط غير مساوية لإحدى قيم Fcc؛ أي بين قيمتين لـ Fcc، فإن الوسيط هو قيمة (x_i) التي ضمن السطر الذي بين قيمتي Fcc؛ وهذا في حالة رسم الجدول بطريقة ترك الأسطر الفارغة، أما في طريقة عدم ترك الأسطر فإن الوسيط هو قيمة (x_i) التي ضمن السطر الذي يتضمن قيمة Fcc الأكبر مباشرة من قيمة رتبة الوسيط.

مثال (3-8): لدينا توزيع مجموعة من الأسر حسب عدد الأطفال، مبينة كما في جدول التوزيع التكراري الآتي:

عدد الأطفال (صفة كمية منفصلة)	01	02	03	04	05
عدد الأسر (F_i)	05	10	15	14	06

- **المطلوب**: حساب الوسيط؟

الحل:

نقوم بإيجاد قيم التكرار المتجمع الصاعد كالآتي:

x_i		01		02		03		04		05		Σ
F_i		05		10		15		14		06		50
Fcc	00		05		15		30		44		50	

لدينا: $25 = \frac{50}{2} = \frac{\sum F_i}{2}$، نلاحظ أن القيمة 25 تقع بين Fcc=15 وFcc=30، إذن مباشرة من الجدول فإن الوسيط هو Me=03.

مثال (3–9): لدينا توزيع مجموعة من الأسر حسب عدد الأطفال، مبينة كما في جدول التوزيع التكراري الآتي:

عدد الأطفال (صفة كمية منفصلة)	01	02	03	04	05
عدد الأسر (F_i)	05	10	15	20	10

– **المطلوب**: حساب الوسيط؟

الحل:

نقوم بإيجاد قيم التكرار المتجمع الصاعد كالآتي:

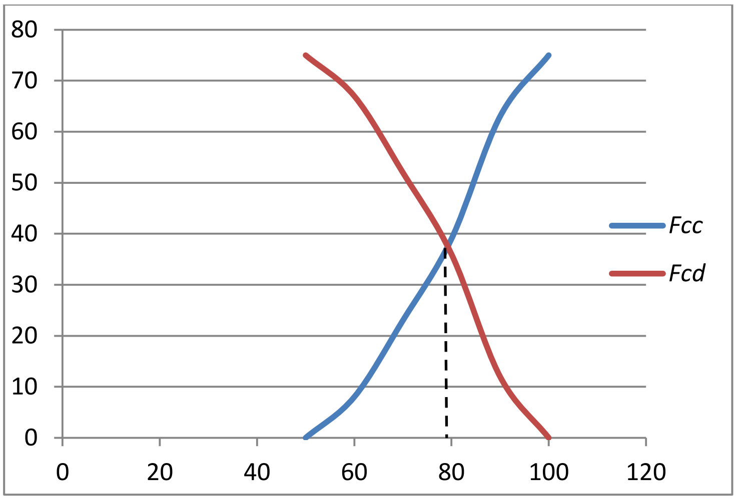
x_i		01		02		03		04		05		Σ
F_i		05		10		15		20		10		60
Fcc	00		05		15		30		50		60	

لدينا: $30 = \frac{60}{2} = \frac{\sum F_i}{2}$، نلاحظ أن القيمة 30 تقع ضمن قيم Fcc، إذن الوسيط هو:

$$Me = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{03 + 04}{2} = 03{,}50$$

3–2– تحديد قيمة الوسيط بيانيا:

في حالة البيانات المبوبة، وإذا كان المتغير متصل، فهناك بعض الطرق لتحديد الوسيط بيانيا، ومن بين أسهلها وأشهرها، هو أن الوسيط يتمثل في النقطة على محور الفواصل عند اسقاط نقطة التقاطع للمنحى التكاملي (منحنى Fcc) والمنحنى التفاضلي (منحنى Fcd)، ويمكن توضيح ذلك كالآتي:



2-4- مشتقات الوسيط: وتسمى بشبيهات الوسيط، وذلك لأنها من نفس جنس الوسيط، ونفس المبدأ لطريقة الحساب، هذه المشتقات تتمثل في الربيعات، العشيريات، المئينات، وسوف نتطرق فقط للربيعات، لأن باقي المشتقات لها نفس مبدأ الحساب مع الربيعات والوسيط.

الرُبَيع الأول Q_1: وهو القيمة التي تقسم السلسلة إلى قسمين، قسم أكبر من هذه القيمة وقسم أقل منها؛ حيث 25% من قيم السلسلة أقل من قيمة الرُبيع الأول و75% من قيم السلسلة أكبر من قيمة الرُبيع الأول.

الرُبَيع الثاني Q_2: هو نفسه الوسيط، وقد تم شرحه وتوضيح كيفية حسابه في مختلف الحالات، لذلك سوف نتطرق إليه فقط في حالة البيانات الغير المبوبة لبعض الغموض التي تتضمنه هذه الحالة، ولتوضيح أن طريقة حساب الوسيط هي نفسها طريقة حساب الربيعات سواء في البيانات المبوبة أو غير المبوبة.

الرُبَيع الثالث Q_3: وهو القيمة التي تقسم السلسلة إلى قسمين، قسم أكبر من هذه القيمة وقسم أقل منها؛ حيث 75% من قيم السلسلة أقل من قيمة الرُبيع الأول و25% من قيم السلسلة أكبر من قيمة الرُبيع الأول.

ملاحظات:

- ✓ من بين الربيعات فإن الربيع الثاني (الوسيط) هو فقط من يعتبر من مقاييس النزعة المركزية؛
- ✓ يعتمد على الربيع الأول والثالث في حساب بعض مقاييس التشتت (الانحراف الربيعي) كما سنرى لاحقا.

2-4-1 – حساب الربيعات في حالة البيانات غير المبوبة:

أ- حساب الربيع الأول: ترتب البيانات تصاعديا أو تنازليا، ثم نحسب رتبة الربيع الأول كالآتي:

$$RQ1 = \frac{n+1}{4}$$

وهنا نميز بين حالتين:

- ✓ إذا كانت رتبة الربيع الأول عدد طبيعي، فإن الربيع الأول مباشرة هو قيمة x_i الموافقة لتلك الرتبة؛ أي:

$$Q_1 = x_{\frac{n+1}{4}}$$

- ✓ إذا كانت رتبة الربيع الأول عدد غير طبيعي، أي أن رتبة الربيع الأول تقع بين رتبتين L و $L+1$، والموافقتين للقيمتين x_L و x_{L+1}، فإنه يتم حساب الربيع الأول وفق العلاقة الآتية:

$$Q_1 = x_L + (x_{L+1} - x_L)(\frac{n+1}{4} - L)$$

نشير إلى أنه تم بناء هذه العلاقة بالاعتماد على **نظرية طاليس** وهي نفس النظرية التي تم من خلالها التوصل إلى العلاقة المستخدمة في حساب الوسيط في حالة البيانات المبوبة.

ب – حساب الربيع الثاني (الوسيط): ترتب البيانات تصاعديا أو تنازليا، ثم نحسب رتبة الربيع الثاني كالآتي:

$$RQ2 = \frac{n+1}{2}$$

وهنا نميز بين حالتين:

- ✓ إذا كانت رتبة الربيع الثاني عدد طبيعي (أي n عدد فردي)، فإن الربيع الثاني مباشرة هو قيمة x_i الموافقة لتلك الرتبة؛ أي: $Q_2 = x_{\frac{n+1}{2}}$، وهو ما تم توضيحه سابقا في حالة الوسيط
- ✓ إذا كانت رتبة الربيع الثاني عدد غير طبيعي (أي n عدد زوجي)، فيكون الربيع الثاني هو:

$$Q_2 = x_L + (x_{L+1} - x_L)\left(\frac{n+1}{2} - L\right)$$

ويمكن تبسيط هذه العلاقة للوصول إلى العلاقة المبسطة التي تم توضيحها سابقا في حالة الوسيط، وذلك كالآتي:

في حالة الربيع الثاني يكون $L = \frac{n}{2}$ وبالتالي نجد:

$$\Rightarrow Q_2 = x_L + (x_{L+1} - x_L)\left(\frac{n+1}{2} - \frac{n}{2}\right)$$

$$\Rightarrow Q_2 = x_L + (x_{L+1} - x_L)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow Q_2 = x_L + \frac{x_{L+1}}{2} - \frac{x_L}{2}$$

$$\Rightarrow Q_2 = \frac{x_L}{2} + \frac{x_{L+1}}{2}$$

$$\Rightarrow Q_2 = \frac{x_L + x_{L+1}}{2}$$

وهي نفس العلاقة التي تم التطرق لها في حالة الوسيط فقط مع تغيير في الرموز، فعندما نضع: $x_L = Me1$،
وكذلك نضع $x_{L+1} = Me2$، فإنه تصبح العلاقة كالآتي: $Me = Q_2 = \frac{Me1+Me2}{2}$

ت- حساب الربيع الثالث: ترتب البيانات تصاعديا أو تنازليا، ثم نحسب رتبة الربيع الثالث كالآتي:

$$RQ3 = \frac{3(n+1)}{4}$$

وهنا نميز بين حالتين:

✓ إذا كانت رتبة الربيع الثالث عدد طبيعي، فإن الربيع الثالث مباشرة هو قيمة x_i الموافقة لتلك الرتبة؛ أي:

$$Q_3 = x_{\frac{3(n+1)}{4}}$$

✓ إذا كانت رتبة الربيع الثالث عدد غير طبيعي، أي أن رتبة الربيع الثالث تقع بين رتبتين L و $L+1$، والموافقتين للقيمتين x_L و x_{L+1}، فإنه يتم حساب الربيع الثالث مثل طريقة الربيع الأول مع اختلاف طفيف، وذلك كالآتي:

$$Q_3 = x_L + (x_{L+1} - x_L)\left(\frac{3(n+1)}{4} - L\right)$$

مثال 3-10: ليكن لدينا مجموعة من البيانات مرتبة تصاعديا كالآتي:

1	3	4	6	7	9	11

المطلوب: أحسب الربيع الأول، الثاني والثالث؟

الحل:

- **حساب الربيع الأول Q1**: أولا نقوم بحساب رتبة الربيع الأول كالآتي:

$$RQ1 = \frac{n+1}{4} = \frac{7+1}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

بما أن قيمة رتبة الربيع الأول هي عدد طبيعي، إذن مباشرة نجد: $Q1 = x_2 = 3$

– **حساب الربيع الثاني Q2 (الوسيط Me)**: أولا نقوم بحساب رتبة الربيع الثاني كالآتي:

$$RQ2 = \frac{n+1}{2} = \frac{7+1}{2} = 4$$

بما أن قيمة رتبة الربيع الثاني هي عدد طبيعي، إذن مباشرة نجد: $Q2 = x_4 = 6$

– **حساب الربيع الثالث**: أولا نقوم بحساب رتبة الربيع الثالث كالآتي:

$$RQ3 = \frac{3(n+1)}{4} = \frac{3(7+1)}{4} = 6$$

بما أن قيمة رتبة الربيع الثالث هي عدد طبيعي، إذن مباشرة نجد: $Q3 = x_6 = 9$

مثال 3–11: ليكن لدينا مجموعة من البيانات مرتبة تصاعديا كالآتي:

12	10	9	9	9	7	6	6	4	2

المطلوب: أحسب الربيع الأول، الثاني والثالث؟

الحل:

– **حساب الربيع الأول Q1**: أولا نقوم بحساب رتبة الربيع الأول كالآتي:

$$RQ1 = \frac{n+1}{4} = \frac{10+1}{4} = 2{,}75$$

بما أن قيمة رتبة الربيع الأول هي عدد غير طبيعي، وهي تقع بين العددين الطبيعيين L=2 وL+1=3،
والموافقين للقيمتين $x_2 = 4$ و $x_3 = 6$، إذن نحسب الربيع الأول كالآتي:

$$Q_1 = x_L + (x_{L+1} - x_L)\left(\frac{n+1}{4} - L\right)$$

$$\Rightarrow Q_1 = x_2 + (x_3 - x_2)\left(\frac{10+1}{4} - 2\right)$$

$$\Rightarrow Q_1 = 4 + (6-4)\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\Rightarrow Q_1 = 5{,}5$$

– **حساب الربيع الثاني Q2** (**الوسيط Me**): أولا نقوم بحساب رتبة الربيع الثاني كالآتي:

$$RQ2 = \frac{n+1}{2} = \frac{10+1}{2} = 5{,}5$$

بما أن قيمة رتبة الربيع الثاني هي عدد غير طبيعي، وهي تقع بين العددين الطبيعيين L=5 وL+1=6، والموافقين للقيمتين $x_5 = 7$ و $x_6 = 9$، إذن فيمكن حساب الربيع الثاني بطريقتين كالآتي:

– **الطريقة الأولى**: $Q_2 = Me = \frac{Me1+Me2}{2} = \frac{7+9}{2} = 8$

– **الطريقة الثانية**: $Q_2 = Me = x_L + (x_{L+1} - x_L)\left(\frac{n+1}{2} - L\right)$

$$\Rightarrow Q_2 = x_5 + (x_6 - x_5)\left(\frac{10+1}{2} - 5\right)$$

$$\Rightarrow Q_2 = 7 + (9-7)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow Q_2 = 8$$

– **حساب الربيع الثالث Q3**: أولا نقوم بحساب رتبة الربيع الثالث كالآتي:

$$RQ3 = \frac{3(n+1)}{4} = \frac{3(10+1)}{4} = 8{,}25$$

بما أن قيمة رتبة الربيع الثالث هي عدد غير طبيعي، وهي تقع بين العددين الطبيعيين L=8 وL+1=9، والموافقين للقيمتين $x_8 = 9$ و $x_9 = 10$، إذن نحسب الربيع الثالث كالآتي:

$$Q_3 = x_L + (x_{L+1} - x_L)\left(\frac{3(n+1)}{4} - L\right)$$

$$\Rightarrow Q_3 = x_8 + (x_9 - x_8)\left(\frac{3(10+1)}{4} - 8\right)$$

$$\Rightarrow Q_3 = 9 + (10-9)\left(\frac{1}{4}\right)$$

$\Rightarrow Q_3 = 9{,}25$

2-4-2 – حساب الربيعات في حالة البيانات المبوبة: يمكن حساب كل من الرُبَيع الأول Q_1 والرُبَيع الثالث Q_3، في حالة رسم جدول التكرار المتجمع الصاعد Fcc بطريقة ترك أسطر فارغة بين الفئات، كالآتي:

أ- المتغير الاحصائي المنفصل:

– حساب الربيع الأول: إذا كانت قيمة $\frac{\sum F_i}{4}$ تقع بين قيمتين لـ Fcc، فإن الربيع الأول Q_1 هو مباشرة من الجدول قيمة x_i التي تقع في السطر الذي بين قيمتي Fcc.

إذا كانت قيمة $\frac{\sum F_i}{4}$ هي قيمة من قيم Fcc، فإن الرُبَيع الأول Q_1 هو متوسط قيمتي $(x_1، x_2)$ التي قبل وبعد سطر Fcc المعني؛ أي: $Q_1 = \frac{x_1+x_2}{2}$

– حساب الربيع الثالث:

إذا كانت قيمة $\frac{3\sum F_i}{4}$ تقع بين قيمتين لـ Fcc، فإن الربيع الثالث Q_3 هو مباشرة من الجدول قيمة x_i التي تقع في السطر الذي بين قيمتي Fcc.

إذا كانت قيمة $\frac{3\sum F_i}{4}$ هي قيمة من قيم Fcc، فإن الرُبَيع الثالث Q_3 هو متوسط قيمتي $(x_1، x_2)$ التي قبل وبعد سطر Fcc المعني؛ أي: $Q_3 = \frac{x_1+x_2}{2}$

ب- المتغير الاحصائي المتصل:

– حساب الربيع الأول: ينبغي أولا ايجاد الفئة التي ينتمي إليها الربيع الأول، حيث نقوم بحساب القيمة $\frac{\sum F_i}{4}$، ثم ننظر أين تقع ضمن قيم Fcc، وهنا نميز بين حالتين:

- إذا كانت هذه القيمة هي احدى قيم Fcc، فهنا مباشرة الربيع الأول هو قيمة الحد الأكبر للفئة التي قبل (والتي هي نفسها قيمة الحد الأدنى للفئة التي بعد)؛

- إذا كانت هذه القيمة تقع بين قيمتين لـ Fcc، ففئة الربيع الأول هي الفئة الموافقة للسطر بين تلك القيمتين لـ Fcc، ويحسب الربيع الأول من خلال العلاقة الآتية: $Q_1 = L_0 + \frac{\frac{\sum F_i}{4} - Fcc_1}{Fcc_2 - Fcc_1} \times K$

– حساب الربيع الثالث: ينبغي أولا ايجاد الفئة التي ينتمي إليها الربيع الثالث، حيث نقوم بحساب القيمة $\frac{3\sum F_i}{4}$، ثم ننظر أين تقع ضمن قيم Fcc، وهنا نميز بين حالتين:

– إذا كانت هذه القيمة هي احدى قيم Fcc، فهنا مباشرة الربيع الثالث هو قيمة الحد الأكبر للفئة التي قبل (والتي هي نفسها قيمة الحد الأدنى للفئة التي بعد)؛

– إذا كانت هذه القيمة تقع بين قيمتين لـ Fcc، ففئة الربيع الثالث هي الفئة الموافقة للسطر بين تلك القيمتين لـ Fcc، ويحسب الربيع الثالث من خلال العلاقة الآتية:

$$Q_3 = L_0 + \frac{\frac{3\sum F_i}{4} - F_1}{F_2 - F_1} \times K$$

3– المنوال Mo: وهو عبارة عن القيمة الأكثر شيوعا (تكرارا، انتشارا) من بين جميع القيم المعنية.

3–1– حالة البيانات غير المبوبة: في حالة ما إذا كانت هذه البيانات غير مكررة (أو لها نفس التكرار)، فإنه لا يوجد منوال، أي أنه لا توجد قيمة مكررة أكثر من القيم الأخرى، أما إذا كانت هذه القيم مكررة (أو على الأقل بعضها مكرر)، فإن المنوال هو القيمة المكررة أكثر (قد تكون أكثر من قيمة)، ولتسهيل ايجاد هذه القيمة نلجأ إلى تبويب هذه البيانات (تحويلها إلى بيانات مبوبة).

مثال (3–12): قمنا بإحصاء عدد الأطفال في 20 عائلة، وكانت النتائج كالآتي:

01	04	05	03	04	03	01	00	02	00
03	05	01	01	03	01	03	03	04	02

المطلوب: أحسب المنوال؟

الحل:

نقوم بترتيب البيانات تصاعديا كالآتي:

00	00	01	01	01	01	01	02	02	03
03	03	03	03	03	04	04	04	05	05

ثم نقوم بتبويب هذه البيانات كالآتي:

x_i	00	01	02	03	04	05	Σ
F_i	02	05	02	06	03	02	20

نلاحظ أن أكبر قيمة للتكرار المطلق هي $F_i = 06$، وهي تقابل $xi = 03$، إذن المنوال هو Mo=03.

3-2- حالة البيانات المبوبة:

3-2-1- المتغير المنفصل: مثل الجدول السابق، فإن المنوال هو قيمة (x_i) المقابلة لأكبر تكرار (F_i)، ويمكن أن نميز بين الحالات الآتية:

- ✓ إذا كانت هناك قيمة واحدة للتكرار هي الأكبر، فإن قيمة Mo ستكون واحدة؛ وإذا كانت قيمة التكرار الأكبر موجودة مرتين فسيكون هناك قيمتين لـ Mo، وهكذا على التوالي؛
- ✓ قيمة واحدة لـ (x_i) فقط مكررة، وباقي قيم (x_i) غير مكررة (أي تكرارها يساوي 1)، فهناك قيمة واحدة لـ Mo؛
- ✓ لا يوجد Mo إذا لم تتكرر أي قيمة من قيم (x_i)، أو إذا كانت جميع القيم لها نفس التكرار.

3-2-2- المتغير المتصل:

- حسابيا: $$Mo = L_0 + \frac{(F_0-F_1)}{(F_0-F_1)+(F_0-F_2)}.K$$

مثال (3-13): ليكن لدينا مجموعة من الأشخاص، موزعين حسب أوزانهم كالآتي:

الفئات (الأوزان)	[50-60[	[60-70[	[70-80[	[80-90[	[90-100[
عدد الأشخاص (التكرار) F_i	8	15	16	24	12

- المطلوب: حساب المنوال؟

الحل: نلاحظ أن أطوال الفئات متساوية، إذا لا نحتاج إلى تصحيح التكرار، ونلاحظ كذلك أن أكبر قيمة للتكرار المطلق هي 24، وهي تقابل الفئة [80-90[، وهي فئة المنوال، نقوم بتطبيق عليها القانون، فنجد:

$$Mo = L_0 + \frac{(F_0 - F_1)}{(F_0 - F_1) + (F_0 - F_2)}.K$$

$$= 80 + \frac{(24 - 16)}{(24 - 16) + (24 - 12)}.10 = 80 + 4 = 84$$

إذا كانت أطوال الفئات غير متساوية فإنه يتم إيجاد الفئة المنوالية وحساب المنوال من خلال التكرار المطلق المصحح (كما تم الإشارة سابقا)، ويمكن توضيح ذلك من خلال المثال الآتي:

مثال (3-14): ليكن لدينا مجموعة من الأشخاص، موزعين حسب أوزانهم كالآتي:

الفئات (الأوزان)	[50-60[	[60-65[	[65-75[	[75-80[	[80-100[
عدد الأشخاص (التكرار F_i)	8	14	25	23	10

- **المطلوب**: حساب المنوال؟

الحل: نلاحظ أن أطوال الفئات غير متساوية، لذلك نلجأ إلى تصحيح قيم التكرار المطلق، كما في الجدول الآتي:

الفئات	[50-60[	[60-65[	[65-75[	[75-80[	[80-100[
أطوال الفئات (Δ)	10	05	10	05	20
التكرار الأصلي F_i	8	14	25	23	10
$\frac{F_i}{\Delta}$	00,80	02,80	02,50	04,60	00,50
التكرار المصحح $F_i^* = \frac{F_i}{\Delta}.10$	08	28	25	46	05

نلاحظ أن أكبر قيمة للتكرار المطلق المصحح هي 46، وهي تقابل الفئة [75-80[، وهي فئة المنوال (طولها 5)، نقوم بتطبيق عليها القانون، فنجد:

(K هو طول الفئة المنوالية)

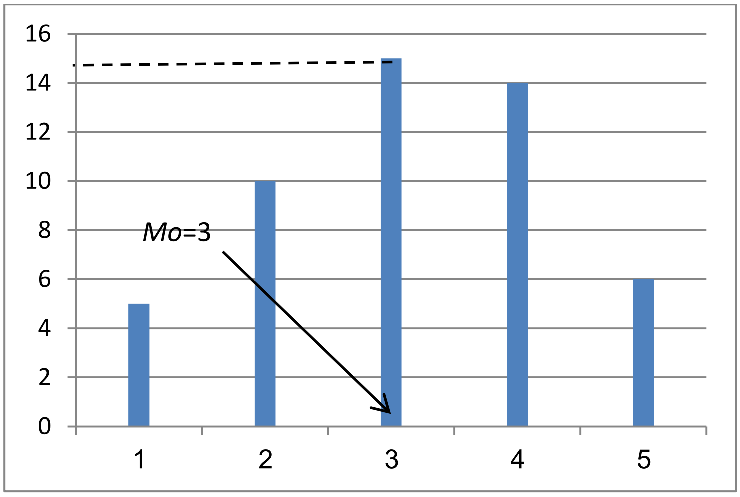
$$Mo = L_0 + \frac{(F_0^* - F_1^*)}{(F_0^* - F_1^*) + (F_0^* - F_2^*)}.K$$

$$= 75 + \frac{(46-25)}{(46-25)+(46-05)}.5 \approx 75 + 1{,}69 \approx 76{,}69$$

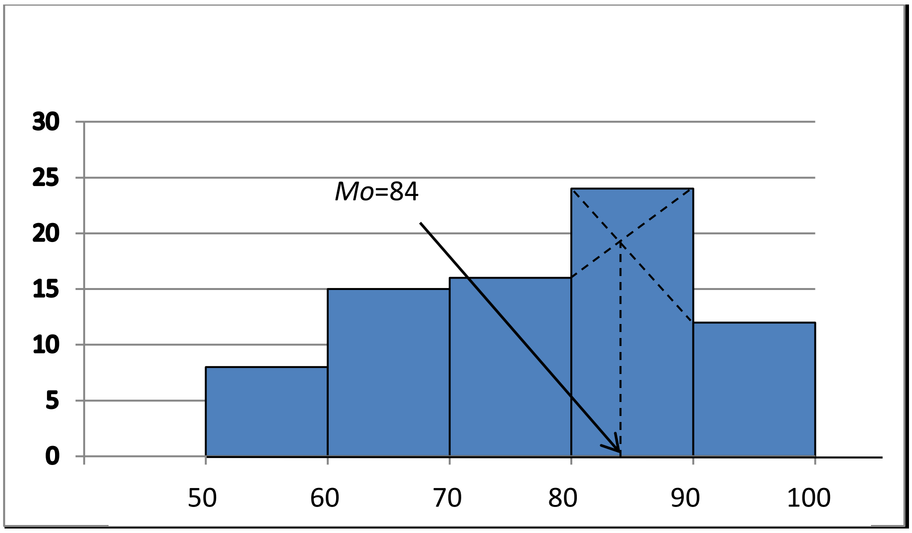
ملاحظة: عند حساب التكرار المصحح، إذا تم اختيار طول الفئة الشائع قيمة أخرى غير القيمة 10، فإنه عند حساب المنوال سنحصل على نفس النتيجة.

3-3- تحديد المنوال بيانيا:

- المتغير المنفصل:



- المتغير المتصل:



4- الوسط الهندسي G : يستخدم لوصف ظاهرة حسب نسبة تغيرها، وخاصة عندما يكون سلوك هذه الظاهرة يتبع نمط المتتالية الهندسية.

أ- الوسط الهندسي البسيط (البيانات غير المبوبة): $G_s = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times x_3 \times \ldots . \times x_n}$

$$Log(G_s) = \frac{1}{n} . \sum_{i=1}^{n} Log(x_i)$$

ب- الوسط الهندسي المرجح (البيانات المبوبة):

- في حالة المتغير المنفصل: $G_p = \sqrt[\sum F_i]{x_1^{F_1} \times x_2^{F_2} \times x_3^{F_3} \times \ldots . \times x_n^{F_n}}$

$$Log(G_p) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(F_i.Log(x_i))}{\sum F_i} = \sum(Fr_i.Log(x_i))$$

– في حالة المتغير المتصل: $G_p = \sqrt[\sum F_i]{c_1^{F_1} \times c_2^{F_2} \times c_3^{F_3} \times \dots \times c_n^{F_n}}$

$$Log(G_p) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(F_i.Log(c_i))}{\sum F_i} = \sum(Fr_i.Log(c_i))$$

5– الوسط التوافقي: وهو مقلوب المتوسط الحسابي لمقلوب قيم i ؛ أي مقلوب المتوسط الحسابي لقيم $\frac{1}{x_i}$، فمثلا إذا رمزنا للمتوسط الحسابي للقيم $\frac{1}{X_i}$ بالرمز $(\bar{Y})$، فإن الوسط التوافقي هو: $\frac{1}{\bar{Y}}$

أ– الوسط التوافقي البسيط: يكون قانون الوسط التوافقي في هذه الحالة هو: $H_s = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum\frac{1}{x_i}} = \frac{n}{\sum\frac{1}{x_i}}$

ب– الوسط التوافقي المرجح:

– المتغير المنفصل: $H_p = \frac{\sum F_i}{\sum(\frac{F_i}{x_i})}$

– المتغير المتصل: $H_p = \frac{\sum F_i}{\sum(\frac{F_i}{c_i})}$

6 – الوسط التربيعي MQ: وهو الجذر التربيعي للمتوسط الحسابي لقيم x_i^2، فمثلا إذا رمزنا للمتوسط الحسابي لهذه القيم بـ $\bar{Y}$، فإن الوسط التربيعي هو: $MQ = \sqrt{\bar{Y}}$

أ– الوسط التربيعي البسيط: $MQ_s = \sqrt{\frac{\sum(x_i^2)}{n}}$

ب– الوسط التربيعي المرجح:

– المتغير المنفصل: $MQ_p = \sqrt{\frac{\sum(F_i.x_i^2)}{\sum(F_i)}} = \sqrt{\sum(Fr_i.x_i^2)}$

– المتغير المتصل: $MQ_p = \sqrt{\frac{\sum(F_i.c_i^2)}{\sum(F_i)}} = \sqrt{\sum(Fr_i.c_i^2)}$

مثال (3-15): ليكن لدينا مجموعة من الأشخاص، موزعين حسب أوزانهم كالآتي:

الفئات (الأوزان)	[50-60[	[60-70[	[70-80[	[80-90[	[90-100[
عدد الأشخاص (التكرار) F_i)	8	15	16	24	12

- **المطلوب**: حساب الوسط الهندسي G، الوسط التوافقي H، الوسط التربيعي G؟

الحل:

الفئات	[50-60[	[60-70[	[70-80[	[80-90[	[90-100[	Σ
مركز الفئة c_i	55	65	75	85	95	//
F_i	8	15	16	24	12	75
$Log(c_i)$	1,74	1,81	1,87	1,93	1,98	//
$F_i.Log(c_i)$	13,92	27,15	29,92	46,32	23,76	141,07
$\frac{F_i}{c_i}$	0,145	0,231	0,213	0,282	0,126	0,997
$F_i.c_i^2$	24200	63375	90000	173400	108300	459275

- **حساب الوسط الهندسي G**:
$$Log(G_p) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(F_i.Log(c_i))}{\sum F_i} = \frac{141,07}{75} = 01,88$$

$$Log(G_p) = 01,88 \Rightarrow 10^{Log(G_p)} = 10^{01,88} \Rightarrow G_p \approx 75,857$$

- **حساب الوسط التوافقي H**:
$$H_p = \frac{\sum F_i}{\sum(\frac{F_i}{c_i})} = \frac{75}{0,997} \approx 75,22$$

- **حساب الوسط التربيعي MQ**:
$$MQ_p = \sqrt{\frac{\sum(F_i.c_i^2)}{\sum(F_i)}} = \sqrt{\frac{459275}{75}} \approx 78,2538$$

7- علاقات رياضية تربط بين مقاييس النزعة المركزية:

- العلاقة بين: MQ، H، G، $\bar{X}$ تتمثل في:
$$H \leq G \leq \bar{X} \leq MQ$$

- العلاقة بين Mo، Me، $\bar{X}$ تتمثل في:
$$G = \sqrt{\bar{X}.H}$$

- إذا كان التوزيع قريب من التماثل، فإن العلاقة بين Mo، Me، $\bar{X}$ هي:

$$(\bar{X} - Mo) = 3.(\bar{X} - Me)$$

- في حالة التوزيع متماثل (متناظر)، فإن العلاقة بين Mo، Me، $\bar{X}$ تتمثل في أن: $Mo = \bar{X} = Me$

تمـــارين محلولة

تمرين (3-1): العلامات التي حصل عليها مجموعة من الطلبة، ممثلة في الآتي:

01	12	15	03	08	03	09	12	13	14
06	12	12	07	12	10	19	15	20	17

- أحسب الوسط الحسابي، الوسيط، الربيع الأول، الربيع الثالث والمنوال؟

الحل:

1/ حساب الوسط الحسابي: $\bar{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i)}{n}=\frac{220}{20}=11$

أي أن العلامة (11) هي متوسط جميع العلامات التي حصل عليها الطلبة.

2/ حساب الوسيط: نقوم أولا بترتيب البيانات تصاعديا كالآتي:

01	03	03	06	07	08	09	10	12	12
12	12	12	13	14	15	15	17	19	20

نلاحظ أن عدد البيانات زوجي، إذن قيمة الوسيط هي: $Me=\frac{Me1+Me2}{2}$

حيث: Me1 رتبته $Rme1=\frac{n}{2}=\frac{20}{2}=12$، إذن: Me1=12 (مباشرة من الجدول).

Me2 رتبته $Rme2=\frac{n}{2}+1=\frac{20}{2}+1=11$، إذن: Me2=12 (مباشرة من الجدول).

وبالتالي تكون قيمة الوسيط Me هي: $Me=\frac{Me1+Me2}{2}=\frac{12+12}{2}=12$

أي أن العلامة (12) تتوسط وتقسم هذه العلامات إلى قسمين متساويين، قسم أصغر والآخر أكبر من هذه العلامة؛ أو بتعبير آخر فإن 50% من الطلبة حصلوا على أقل من العلامة 12، و50% حصلوا على أكبر من العلامة 12.

3/ حساب الربيع الأول Q1:

أولا نقوم بحساب رتبة الربيع الأول كالآتي: $RQ1=\frac{n+1}{4}=\frac{20+1}{4}=5{,}25$

بما أن قيمة رتبة الربيع الأول هي عدد غير طبيعي، وهي تقع بين العددين الطبيعيين L=5 و6=L+1، والموافقين للقيمتين $x_5 = 7$ و $x_6 = 8$، إذن نحسب الربيع الأول كالآتي:

$$Q_1 = x_L + (x_{L+1} - x_L)\left(\frac{n+1}{4} - L\right)$$

$$\Rightarrow Q_1 = x_5 + (x_6 - x_5)\left(\frac{20+1}{4} - 5\right)$$

$$\Rightarrow Q_1 = 7 + (8 - 7)\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow Q_1 = 7{,}25$$

أي أن العلامة (7,25) تقسم العلامات إلى قسمين غير متساويين، قسم أصغر من هذه العلامة يتضمن 25% من العلامات، والآخر أكبر يتضمن 75% من العلامات، أو بتعبير آخر فإن 25% من الطلبة حصلوا على أقل من العلامة 7,25، و75% حصلوا على أكبر من العلامة 7,25.

4/ حساب الربيع الثالث Q3:

أولا نقوم بحساب رتبة الربيع الثالث كالآتي: $RQ3 = \frac{3(n+1)}{4} = \frac{3(20+1)}{4} = 15{,}75$

بما أن قيمة رتبة الربيع الثالث هي عدد غير طبيعي، وهي تقع بين العددين الطبيعيين L=15 و16=L+1، والموافقين للقيمتين $x_{15} = 15$ و $x_{16} = 15$، إذن نحسب الربيع الثالث كالآتي:

$$Q_3 = x_L + (x_{L+1} - x_L)\left(\frac{3(n+1)}{4} - L\right)$$

$$\Rightarrow Q_1 = x_{15} + (x_{16} - x_{15})\left(\frac{3(20+1)}{4} - 15\right)$$

$$\Rightarrow Q_1 = 15 + (15 - 15)\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\Rightarrow Q_3 = 15$$

أي أن العلامة (15) تقسم العلامات إلى قسمين غير متساويين، قسم أصغر من هذه العلامة يتضمن 75% من العلامات، والآخر أكبر يتضمن 25% من العلامات، أو بتعبير آخر فإن 75% من الطلبة حصلوا على أقل من العلامة 15، و25% حصلوا على أكبر من العلامة 15.

5/ حساب المنوال Mo: نلاحظ أن هناك قيمة واحدة مكررة أكثر، وهي 12، إذن Mo=12.

أي أن العلامة (12) هي الأكثر شيوعا وتكرارا من بين العلامات التي حصل عليها الطلبة.

تمرين (3–2): ليكن لدينا البيانات الآتية: 2، 4، 5، 6، 8، 10، 12.

المطلوب: حساب الوسط التوافقي، الوسط الهندسي والوسط التربيعي؟

الحل:

1/ حساب الوسط التوافقي:

$$H_s = \frac{n}{\sum \frac{1}{x_i}} = \frac{7}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}\right)} = \frac{7}{1,425} \approx 4,91$$

2/ حساب الوسط الهندسي:

$$G_s = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times x_3 \times \dots . \times x_n}$$

$$= \sqrt[7]{2 \times 4 \times 5 \times 6 \times 8 \times 10 \times 12} = \sqrt[7]{230400} \approx 05,83$$

طريقة 2:

$$Log(G_S) = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} Log(x_i)$$

$$= \frac{1}{7}.[(Log(2) + Log(4) + Log(5) + (Log(6) + Log(8) + Log(10) + Log(12)]$$

$$= \frac{5,36}{7} \approx 00,7657$$

إذن:

$$Log(G_S) = 00,7657 \Rightarrow G_S = 10^{00,7657} \approx 05,83$$

3/ حساب الوسط التربيعي:

$$MQ_s = \sqrt{\frac{\sum(x_i^2)}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{2^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 + 12^2}{7}} = \sqrt{\frac{389}{7}} = 07,45$$

تمرين (3–3): ليكن لدينا جدول التوزيع التكراري الآتي:

x_i	03	05	07	08	09	10
F_i	05	12	13	09	07	04

– أحسب الوسط الحسابي، الوسيط، الربيع الأول، الربيع الثالث، المنوال، الوسط الهندسي، الوسط التوافقي والوسط التربيعي؟

الحل:

x_i	03	05	07	08	09	10	المجموع
F_i	05	12	13	09	07	04	50
$F_i.x_i$	15	60	91	72	63	40	341
$Log(x_i)$	0,48	0,70	0,84	0,90	0,95	1	//
$F_i.Log(x_i)$	02,4	08,4	10,92	08,1	06,65	04	40,47
$\frac{F_i}{x_i}$	01,67	02,40	01,86	01,12	00,78	00,40	08,23
$F_i.x_i^2$	45	300	637	576	567	400	2525

1/ حساب الوسط الحسابي: $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(F_i.x_i)}{\sum F_i} = \frac{341}{50} = 06{,}82$

2/ حساب الوسيط *Me*: لدينا $\frac{\sum F_i}{2} = \frac{50}{2} = 25$، ثم نقوم بإيجاد قيم *Fcc*، كالآتي:

x_i		03		05		07		08		09		10		المجموع
F_i		05		12		13		09		07		04		50
Fcc	00		05		17		30		39		46		50	

من خلال قيم *Fcc*، نلاحظ أن القيمة 25، تقع بين القيمة *Fcc=17*، والقيمة *Fcc=30*، وذلك يوافق قيمة $x_i = 07$، إذن قيمة الوسيط هي *Me=07*.

3/ حساب الربيع الأول *Q1*: لدينا $\frac{\sum F_i}{4} = \frac{50}{4} = 12{,}5$

من خلال قيم *Fcc*، نلاحظ أن القيمة 12,5، تقع بين القيمة *Fcc=05*، والقيمة *Fcc=17*، وذلك يوافق قيمة $x_i = 05$، إذن قيمة الربيع الأول هي *Q1=05*.

4/ حساب الربيع الثالث $Q3$: لدينا $\frac{3(\sum F_i)}{4} = \frac{150}{4} = 37{,}5$

من خلال قيم Fcc، نلاحظ أن القيمة 37,5، تقع بين القيمة $Fcc=30$، والقيمة $Fcc=39$، وذلك يوافق قيمة $x_i = 08$، إذن قيمة الربيع الثالث هي $Q3=08$.

5/ حساب المنوال Mo: نلاحظ أن أكبر قيمة للتكرار المطلق هي $Fi=13$، وهي تقابل قيمة قيمة $x_i = 07$، إذن قيمة المنوال هي $Mo=07$.

6/ حساب الوسط الهندسي G: $Log(G_p) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(F_i.Log(x_i))}{\sum F_i} = \frac{40{,}47}{50} = 00{,}8094$

إذن: $G_P = 10^{00{,}8094} \approx 06{,}45$

7/ حساب الوسط التوافقي: $H_p = \frac{\sum F_i}{\sum(\frac{F_i}{x_i})} = \frac{50}{08{,}23} \approx 06{,}07$

8/ حساب الوسط التربيعي: $MQ_p = \sqrt{\frac{\sum(F_i.x_i^2)}{\sum(F_i)}} = \sqrt{\frac{2525}{50}} \approx 07{,}11$

تمرين (3-4): لدينا عينة مكونة من 100 شخص، وجدول التوزيع التكراري لهذه العينة يتمثل في الآتي:

الفئات	[02-06[	[06-10[	[10-14[	[14-18[	[18-22[	[22-26[
Fr	0,08	0,12	0,35	0,25	0,11	0,09

المطلوب: أحسب الوسط الحسابي؟

الحل:

الفئات	[02-06[	[06-10[	[10-14[	[14-18[	[18-22[	[22-26[	المجموع
c_i	04	08	12	16	20	24	//
Fr	0,08	0,12	0,35	0,25	0,11	0,09	01
$Fr.c_i$	0,32	0,96	4,2	4	2,2	2,16	13,84
$F_i = Fr \times 100$	08	12	35	25	11	09	100
$F_i.c_i$	32	96	42	40	220	216	1384

حساب الوسط الحسابي:

الطريقة الأولى: $\bar{X} = \sum(Fr.c_i) = 13,84$

الطريقة الثانية: نقوم بحساب قيم التكرار المطلق من خلال العلاقة $F_i = Fr \times n$، حيث n هي حجم العينة (100 شخص)، ومنه يكون الوسط الحسابي هو: $\bar{X} = \frac{\sum(F_i.c_i)}{\sum F_i} = \frac{1384}{100} = 13,84$

تمرين (3-5): ليكن لدينا جدول التوزيع التكراري الآتي:

الفئات	[05-15[	[15-25[	[25-35[	[35-45[	[45-55[	[55-65[
F_i	06	09	10	08	04	03

- أحسب الوسط الحسابي، الوسط الهندسي، الوسط التوافقي، الوسط التربيعي، الوسيط، الربيع الأول، الربيع الثالث والمنوال؟

الحل:

الفئات	[05-15[	[15-25[	[25-35[	[35-45[	[45-55[	[55-65[	المجموع
مراكز الفئات c_i	10	20	30	40	50	60	//
F_i	06	09	10	08	04	03	40
$F_i.c_i$	60	180	300	320	200	180	1240
$Log(c_i)$	01	01,30	01,48	01,60	01,69	01,78	//
$F_i.Log(c_i)$	06	11,70	14,80	12,80	06,76	05,34	57,40
$\frac{F_i}{c_i}$	00,60	00,45	00,33	00,20	00,08	00,05	01,71
$F_i.c_i^2$	600	3600	9000	12800	10000	10800	46800

1/ حساب الوسط الحسابي: $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(F_i.c_i)}{\sum F_i} = \frac{1240}{40} = 31$

2/ حساب الوسط الهندسي $\boldsymbol{G}$: $Log(G_p) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(F_i.Log(c_i))}{\sum F_i} = \frac{57,40}{40} = 01,435$

إذن: $G_P = 10^{01,435} \approx 27,23$

3/ حساب الوسط التوافقي: $H_p = \frac{\sum F_i}{\sum(\frac{F_i}{c_i})} = \frac{40}{01,71} \approx 23,39$

4/ حساب الوسط التربيعي: $MQ_p = \sqrt{\frac{\sum(F_i.c_i^2)}{\sum(F_i)}} = \sqrt{\frac{46800}{40}} \approx 34,20$

5/ حساب الوسيط: نقوم بإيجاد قيم التكرار المتجمع الصاعد كالآتي:

Σ		[55–65[		[45–55[		[35–45[		[25–35[		[15–25[		[05–15[		الفئات
40		03		04		08		10		09		06		F_i
//	40		37		33		25		15		06		0	*Fcc*

لدينا: $20 = \frac{40}{2} = \frac{\sum F_i}{2}$، ونلاحظ أن القيمة 20 تقع بين القيمتين Fcc=15 وFcc=25، إذن الفئة التي ينتمي إليها الوسيط هي [25–35[، ومنه الوسيط هو:

$$\text{Me} = \text{L}_0 + \frac{\frac{\sum F_i}{2} - Fcc_1}{Fcc_2 - Fcc_1} \times K = 25 + \frac{20 - 15}{25 - 15} \times 10 = 30$$

6/ حساب الربيع الأول Q1:

لدينا: $10 = \frac{40}{4} = \frac{\sum F_i}{4}$، ومن خلال قيم Fcc نلاحظ أن القيمة 10 تقع بين القيمتين Fcc=06 وFcc=15، إذن الفئة التي ينتمي إليها الربيع الأول هي [15–25[، ومنه الربيع الأول هو:

$$\text{Q1} = \text{L}_0 + \frac{\frac{\sum F_i}{4} - Fcc_1}{Fcc_2 - Fcc_1} \times K = 15 + \frac{10 - 06}{15 - 06} \times 10 \approx 19,44$$

7/ حساب الربيع الثالث Q3:

لدينا: $30 = \frac{120}{4} = \frac{3(\sum F_i)}{4}$، ومن خلال قيم Fcc نلاحظ أن القيمة 30 تقع بين القيمتين Fcc=25 وFcc=33، إذن الفئة التي ينتمي إليها الربيع الثالث هي [35–45[، ومنه الربيع الثالث هو:

$$\text{Q3} = \text{L}_0 + \frac{\frac{3(\sum F_i)}{4} - Fcc_1}{Fcc_2 - Fcc_1} \times K = 35 + \frac{30 - 25}{33 - 25} \times 10 \approx 42,14$$

8/ حساب المنوال: نلاحظ أن الفئات متساوية الطول، إذن لا نحسب التكرار المصحح، ونلاحظ أن أكبر قيمة لـلتكرار المطلق هي $F_i = 10$، وبالتالي الفئة المنوالية هي]25-35[، ومنه المنوال هو:

$$Mo = L_0 + \frac{(F_0 - F_1)}{(F_0 - F_1) + (F_0 - F_2)}.K = 25 + \frac{(10-9)}{(10-9)+(10-8)} \times 10 \approx 28,33$$

تمرين (3-6): ليكن لدينا جدول التوزيع التكراري الآتي:

الفئات	[05-15[	[15-35[	[35-45[	[45-65[	[65-75[	[75-85[
F_i	12	14	18	20	16	10

1/ أحسب الوسط الحسابي بالطرق الثلاث: المباشرة، الوسط الفرضي والانحرافات المختصرة؟

2/ أحسب المنوال؟

الحل:

الفئات	[05-15[	[15-35[	[35-45[	[45-65[	[65-75[	[75-85[	المجموع
مراكز الفئات c_i	10	25	40	55	70	80	//
F_i	12	14	18	20	16	10	90
$F_i.c_i$	120	350	720	1100	1120	800	4210
w_i	-45	-30	-15	00	15	25	//
$F_i.w_i$	-540	-420	-270	00	240	250	-740
$\grave{w}_i$	-02,25	01,50-	00,75-	00	00,75	01,25	//
$F_i.\grave{w}_i$	-27	21-	-13,50	00	12	12,50	-37

1/ حساب الوسط الحسابي بالطرق الثلاثة:

- **الطريقة المباشرة:** $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(F_i.c_i)}{\sum F_i} = \frac{4210}{90} \approx 46,78$

- **طريقة الوسط الفرضي**: نلاحظ أن أكبر قيمة للتكرار المطلق هي 20، ومركز الفئة المقابلة لها هي 55، وهي الوسط الفرضي الذي يتم اختياره؛ أي: α=55 (حتى لو تم اختيار قيمة أخرى فإن الطريقة والنتيجة صحيحة، لكن فقط من أجل توحيد طرق الحل بين الطلبة).

$$\bar{X} = \alpha + \frac{\sum_{i=1}^{n}(F_i.w_i)}{\sum F_i}$$

حيث: $w_i = c_i - \alpha$

$$= 55 + \frac{(-740)}{90} \approx 46,78$$

– **طريقة الانحرافات المختصرة**:

$$\bar{X} = \alpha + \frac{\sum_{i=1}^{n}(F_i.\grave{w}_i)}{\sum F_i}.K$$

حيث: $\grave{w}_i = \frac{w_i}{K}$ نختار K=20 (طول الفئة الأكبر)

ومنه: $\bar{X} = 55 + \frac{(-37)}{90} \times 20 \approx 46,78$

2/ حساب المنوال: نلاحظ أن أطوال الفئات غير متساوية، إذن لابد من اللجوء إلى حساب التكرار المصحح F_i^*، حيث: $F_i^* = \frac{F_i}{\text{طول الفئة}} \times$ الثابت، نلاحظ أن طول الأكثر شيوعا هو 10، وهي قيمة الثابت، ويمكن توضيح ذلك كالآتي:

الفئات	[05-15[	[15-35[	[35-45[	[45-65[	[65-75[	[75-85[
طول الفئة	10	20	10	20	10	10
F_i	12	14	18	20	16	10
$\frac{F_i}{\text{طول الفئة}}$	1,2	0,7	1,8	1	1,6	1
$F_i^* = \frac{F_i}{\text{طول الفئة}} \times 10$	12	07	18	10	16	10

نلاحظ أن أكبر قيمة للتكرار المصحح هي 18، وهي توافق الفئة [35-45[، وهي الفئة المنوالية، إذن نقوم بتطبيق القانون على هذه الفئة كالآتي:

$$Mo = L_0 + \frac{(F_0^* - F_1^*)}{(F_0^* - F_1^*) + (F_0^* - F_2^*)}.K$$

$$= 35 + \frac{(18 - 07)}{(18 - 07) + (18 - 10)}.10 \approx 35 + 05,79 \approx 40,79$$