Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf - Mila | Année universitaire 2022-2023
Institut des Sciences et de la Technologie | Département de SNV
Matière : Mathématique Statistique | L1 SNV, Semestre I
Responsable de la matière: **Dr. HAFIRASSOU Zineb** | Durée: 1h30

Correction d'examen

Exercice 1 (4.5 pts) Vrai ou Faux

❶ Vrai. (0.5pt)

❷ Vrai. (0.5pt)

❸ Faux. (0.5pt)
- La série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente pour tout $\alpha > 1$. (0.5pt)

❹ Faux. (0.5pt)
- Si les deux séries numériques $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont divergente alors on ne peut rien conclure sur la la nature de la série $\sum_{n\geq 0}(u_n + v_n)$. (0.5pt)

❺ Faux. (0.5pt)
- Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors on ne peut rien conclure sur la nature de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$. (0.5pt)

❻ Vrai. (0.5pt)

Exercice 2 (7 pts)

❶ Soit la fonction de deux variable suivante

$$f(x, y) = x^2 + y^3 + xy.$$

- Déterminons D_f: $D_f = \mathbb{R}^2$. (0.5pt)

- Calculons les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f.

(0.75pt) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 + x$ (0.75pt)

(0.75pt) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2$ $\qquad$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 1$ (0.75pt)

(0.75pt) $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6y$ $\qquad$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 1$ (0.75pt)

❷ Calculons l' intégrale suivante

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^2 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 y}{z}\, dx\, dy\, dz \\
&= \int_0^1 x^2\, dx \;\; (0.25pt) \quad \int_0^1 y\, dy \;\; (0.25pt) \quad \int_1^2 \frac{1}{z}\, dz \;\; (0.25pt) \\
&= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \; (0.25pt) \quad \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 \; (0.25pt) \quad \left[\ln|z|\right]_1^2 \; (0.25pt) \\
&= \frac{\ln 2}{6} \qquad (0.5pt)
\end{aligned}$$

Exercice 3 (8.5 pts)

On a mesuré le nombre de pulsations cardiaques chez les 50 malades du service de cardiologie.

❶ - La population: les malades (0.25pt)

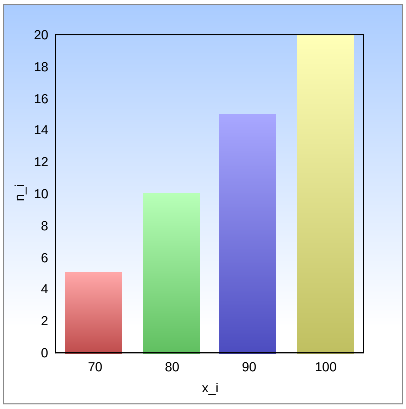
- Le caractère étudié: le nombre de pulsations cardiaques par minute (0.25pt)

- La nature: quantitatif (0.25pt) discret. (0.25pt)

❷ Le tableau (1.5pt)

$\mathbf{x_i} =$	$\mathbf{n_i}$	$\mathbf{n_i^c} \uparrow$	$\mathbf{f_i}$	$\mathbf{f_i^c} \uparrow$
70	5	5 (0.125pt)	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
80	10	15	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$
90	15	30	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$
100	20	50	$\frac{2}{5}$	1

❸ La représentation graphique (0.5pt)



❹ - Le mode (**Mo**): est la valeur x_i ayant le plus grand effectif

$$Mo = 100. \qquad (0.25pt)$$

- La moyenne ($\bar{\mathbf{x}}$)

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4} n_i x_i \qquad (0.25pt)\\ &= \frac{1}{50}\big(5\times 70 + 10\times 80 + 15\times 90 + 20\times 100\big) = \frac{4500}{50}\\ &= 90. \qquad (0.25pt)\end{aligned}$$

- La médiane (**Me**)

On a $n = 50$ est pair, alors

$$\begin{aligned}Me &= \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2} \qquad (0.25pt)\\ &= \frac{x_{25} + x_{26}}{2} = \frac{90+90}{2}\\ &= 90. \qquad (0.25pt)\end{aligned}$$

❺ - Les quartiles ($\mathbf{Q_1}$) et ($\mathbf{Q_3}$)

on a $n = 50 \Rightarrow \frac{n}{4} = 12.5$ (0.25pt) alors $Q_1 = x_{13} = 80.$ (0.25pt)

on a $n = 50 \Rightarrow \frac{3n}{4} = 37.5$ (0.25pt) alors $Q_3 = x_{38} = 100.$ (0.25pt)

- L'écart interquartiles ($\mathbf{I_Q}$)

$$\begin{aligned}I_Q &= Q_3 - Q_1 \qquad (0.25pt)\\ &= 100 - 80\\ &= 20. \qquad (0.25pt)\end{aligned}$$

❻ - L'étendue (**e**)

$$\begin{aligned}e &= x_{max} - x_{min} \qquad (0.25pt)\\ &= 100 - 70\\ &= 30. \qquad (0.25pt)\end{aligned}$$

- La variance ($\mathbf{V(X)}$)

$$\begin{aligned}V(X) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4} n_i x_i^2 - \bar{x}^2 \qquad (0.25pt)\\ &= \frac{1}{50}\big(5\times 70^2 + 10\times 80^2 + 15\times 90^2 + 20\times 100^2\big) - 90^2\\ &= \frac{410000}{50} - 8100\\ &= 8200 - 8100\\ &= 100. \qquad (0.25pt)\end{aligned}$$

- L'écart-type ($\sigma_{\mathbf{X}}$)

$$\begin{aligned} \sigma_X &= \sqrt{V(X)} \quad \textcolor{red}{(0.25pt)} \\ &= \sqrt{100} \\ &= 10. \quad \textcolor{red}{(0.25pt)} \end{aligned}$$

- Le coefficient de variation (**CV**)

$$\begin{aligned} CV &= \frac{\sigma_X}{\bar{x}} \quad \textcolor{red}{(0.25pt)} \\ &= \frac{10}{90} \\ &= 0.11 \quad \textcolor{red}{(0.25pt)} \end{aligned}$$

❼ - Le coefficient d'asymétrie de Pearson ($\mathbf{A_P}$)

$$\begin{aligned} A_P &= \frac{\bar{x} - Mo}{\sigma_X} \quad \textcolor{red}{(0.25pt)} \\ &= \frac{90 - 100}{10} \\ &= -1. \quad \textcolor{red}{(0.25pt)} \end{aligned}$$

- La conclusion nécessaire: on a $A_P < 0$ alors la distribution est plus étalée à gauche. (0.25pt)