
TD 4 : INTRODUCTION AUX NOTIONS DE STABILITÉ

Exercice 1

1) On considère le système $Y' = AY$ avec

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

On suppose que $\det A \neq 0$. Etudier la classification de l'origine en utilisant $\det A$, $\text{tr}A$ et $\Delta_A = \Delta(P_\lambda(A))$.

2) Classifier l'origine pour le système $Y' = AY$ avec

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

.

Exercice 2

Soit le système non linéaire suivant :

$$(1) \begin{cases} x' = x + \sin(3x - y) \\ y' = e^x - 1 \end{cases} .$$

1) Justifier l'existence d'une unique solution maximale, prenant la valeur $Y(0) = (x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ à l'instant $t = 0$.

2) Montrer que $(0, 0)$ est un point d'équilibre.

3) Linéariser le système et étudier la stabilité de son point d'équilibre et dire ce qu'on peut déduire sur la stabilité de $(0, 0)$ pour le système (1).

Exercice 3

Utiliser la méthode de linéarisation pour étudier la stabilité des points d'équilibre du système non linéaire suivant :

$$(2) \begin{cases} x' = y(x + 1) \\ y' = x(y^3 + 1) \end{cases} .$$

R de la matière : S. Bourourou