- ندرس في هذه المحاضرة المتغيرات العشوائية المزدوجة (الثنائية) المنقطعة والمستمرة وخواصها:

X منقطع و Y منقطع ، X مستمر و Y مستمر

تعريف:

الشعاع العشوائي للمتغيرين **X , Y** عبارة عن دالة معرّفة على فضاء العينة **S** ويأخذ قيمته في $\mathbb{R}^2$

- إذا كان X متغير عشوائي منقطع:

$$X: x_1, x_2, \dots\dots, x_n$$
$$Y: y_1, y_2, \dots\dots, y_n$$

فإن الدالة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين X و Y نرمز لها بالرمز $f(x,y)$. وهذه الدالة تحقق جميع

شروط الدوال الاحتمالية:

$$f(x,y) \geq 0$$
$$\sum f(x,y) = 1$$

I. التوزيعات الثنائية المنقطعة:

ليكن X , Y متغيرين عشوائيين من النوع المنقطع على نفس فضاء العينة S حيث:

$$X(s) = R_X = \{x_1, x_2, \dots\dots, x_n\}$$
$$Y(s) = R_Y = \{y_1, y_2, \dots\dots, y_n\}$$

فإنه يمكن أن نأخذ مجموعة حاصل جداء:

$$X(s).Y(s) = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots\dots, (x_n, y_n)\}$$

إنّ هذه الدالة الاحتمالية المشتركة لهذا المتغير ونرمز لها بـــ $f(x,y)$ وتساوي بالتعريف:

$$\boldsymbol{f(x,y) = p(X = x \quad, Y = y)}$$

ويمكن أن نشكل جدولا نضع فيها قيما للمتغيرين العشوائيين X و Y:

X/Y	y_1	y_2	………	y_n	………	المجموع
x_1	$f(x_1,y_1)$	$f(x_1,y_2)$	………	$f(x_1,y_n)$	………	$\sum_j f(x_1,y_j)=f_X(x_1)$
x_2	$f(x_2,y_1)$	$f(x_2,y_2)$	………	$f(x_2,y_n)$	………	$\sum_j f(x_2,y_j)=f_X(x_2)$
. . .			………		………	
x_m	$f(x_m,y_1)$	$f(x_m,y_2)$	………	$f(x_m,y_n)$	………	$\sum_j f(x_m,y_j)=f_X(x_{2m})$
. . .	. . .	. . .		. . .		. . .
المجموع	$\sum_i f(x_i,y_1) = f_Y(y_1)$	$\sum_i f(x_i,y_2) = f_Y(y_2)$		$\sum_i f(x_i,y_n) = f_Y(y_n)$	………	1

إنّ دالة الكثافة المشتركة لـــ (X,Y) تحقق الخواص التالية:

1- $\mathbf{0 \le f_{X,Y}(x,y) \le 1} \qquad \forall\ x \epsilon R_x\ ,\ \ y \epsilon R_y$

2- $f(x,y)=P(X=x,Y=y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f\left(x_i,y_j\right)$

3- $F(x,y)=P(X\le x\,,Y\le y)=\sum_{X\le x_i}\sum_{Y\le y_j} f\left(x_i,y_j\right)$

مثال:

في تجربة إلقاء قطعين من النرد مرة واحدة. إذا كانت X هي مجموع النقاط التي تظهر على القطعتين، و Y هي أكبر النقاط التي تظهر على القطعتين. أوجد الدالة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين $X\,,Y$.

الحل:

فضاء العينة وتحديد المتغيرات العشوائية:

$$S=\{(i,j):\ \ i=j=1,2,3,4,5,6\}$$

$$X=(i+j)=2,3,4,\ldots\ldots,12$$

$$Y=Max(i,j)=1,2,3,4,5,6$$

يمكن حساب احتمالات القيم الختلفة بين X,Y على النحو التالي:

X/Y	1	2	3	4	5	6	$\sum =$
2	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{36}}$
3	0	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0	$\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{36}}$
4	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	$\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{36}}$
5	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	$\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{36}}$
6	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{36}}$
7	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{36}}$
8	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{36}}$
9	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{36}}$
10	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{36}}$
11	0	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{36}}$
12	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{36}}$
$\sum =$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{36}}$	$\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{36}}$	$\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{36}}$	$\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{36}}$	$\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{36}}$	$\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{36}}$	**1**

من خلال هذا الجدول يمكن أن نجد:

<u>مثلا:</u>

$$\boldsymbol{f(2,1)} = P(X = 2\,, Y = 1) = P(1,1) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{36}}$$

$$\boldsymbol{f(2,2)} = P(X = 2\,, Y = 2) = P(\Phi) = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{f(3,1)} = P(X = 3\,, Y = 1) = P(\Phi) = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{f(4,3)} = P(X = 4\,, Y = 2) = P(\Phi) = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{36}}$$

$$\boldsymbol{F(4,3)} = P(X \leq 4, Y \leq 3) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$$

$$\boldsymbol{F(6,3)} = P(X \leq 6, Y \leq 3) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

$$P(6 \leq X \leq 8,\ \ 4 \leq Y \leq 6) = \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} = \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{36}}$$

- **استقلالية المتغيرات العشوائية:**

يقال عن المتغيرين المنقطعين X, Y أنهما مستقلان إذا تحقق:

- $f(x, y) = f(x)f(y)$
- دالة التوزيع التراكمية: $F(x, y) = F(X)F(Y)$

وبالتالي فإنّ:

$$\boldsymbol{f(x, y)} = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}F(X)\frac{\partial}{\partial y}F(Y) = \boldsymbol{f(x)}.\boldsymbol{f(y)}$$

مثال:

إذا كانت الدالة الاحتمالية المشتركة لـــ X, Y هي:

$$f(x, y) = \frac{\lambda^{x+y}e^{-2\lambda}}{x!\,y!} \qquad \begin{matrix} x = 0,1,2 \ldots \\ ,\ y = 0,1,2 \ldots \end{matrix}$$

هل X, Y مستقلان؟

الحل:

نوجد أولا الدوال الهامشية لـــ X ثم لـــ Y ثم نأخذ المجموع:

$$\boldsymbol{f(x)} = \sum_{y} \frac{\lambda^{x+y}e^{-2\lambda}}{x!\,y!} = \frac{\lambda^{x}e^{-2\lambda}}{x!}\sum_{y}\frac{\lambda^{y}}{y!} = \frac{\lambda^{x}e^{-2\lambda}}{x!}.e^{\lambda} = \frac{\boldsymbol{\lambda^{x}e^{-\lambda}}}{\boldsymbol{x!}}$$

$$\boldsymbol{f(y)} = \sum_{x} \frac{\lambda^{x+y}e^{-2\lambda}}{x!\,y!} = \frac{\lambda^{y}e^{-2\lambda}}{y!}\sum_{x}\frac{\lambda^{x}}{x!} = \frac{\lambda^{y}e^{-2\lambda}}{y!}.e^{\lambda} = \frac{\boldsymbol{\lambda^{y}e^{-\lambda}}}{\boldsymbol{y!}}$$

$$\boldsymbol{f(x)}.\boldsymbol{f(y)} = \boldsymbol{f(x, y)} = \begin{cases} f(x) = \dfrac{\boldsymbol{\lambda^{x}e^{-\lambda}}}{\boldsymbol{x!}} \\ f(y) = \dfrac{\boldsymbol{\lambda^{y}e^{-\lambda}}}{\boldsymbol{y!}} \end{cases}$$

أي أن المتغيرين X, Y مستقلين.

- **التوزيعات الاحتمالية المشروطة:**

إذا كان الشعاع (X,Y) متغيرا عشوائيا منقطع. دالته الاحتمالية المشروطة للمتغير Y بشرط $X = x_i$ هي:

$$f(Y \setminus X = x_i) = \frac{f(x_i, y)}{f(x_i)}$$

$f(x)$ هي الدالة الاحتمالية الهامشية للمتغير X و $f(x_i) > 0$

الدالة الاحتمالية المشروطة للمتغير X بشرط $Y = y_i$ هي:

$$f(X \setminus Y = y_i) = \frac{f(x_i, y)}{f(y_i)}$$

$f(y)$ هي الدالة الاحتمالية الهامشية للمتغير Y و $f(y_i) > 0$

ملاحظة جد مهمة:

إن الدوال الاحتمالية المشروطة تحقق جميع شروط التوزيع الاحتمالي العادي. فمثلا:

$$f(X \setminus Y = y_i) = \frac{f(x_i, y)}{f(y_i)} \geq 0$$

مثال:

إذا كانت الدالة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين X, Y كما في الجدول التالي:

Y/X	**1**	**2**	**3**
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
3	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
4	0	$\frac{1}{3}$	0

- أوجد الدالة الهامشية لكل متغير.
- أوجد $P(X = 2/ Y = 2), P(X = 1/ Y < 4), P\left(X = 2 \text{ أو } Y = 4\right)$

الحل:

بجمع الاحتمالات عموديا وأفقيا نحصل على الدوال الاحتمالية الهامشية لكل متغير:

- الدالة الاحتمالية الهامشية للمتغير X هي:

$\boldsymbol{x}$	**1**	**2**	**3**
$\boldsymbol{f(x)}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

- الدالة الاحتمالية الهامشية للمتغير Y هي:

y	2	3	4
$f(y)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$$P(X=2/\,Y=2)=\frac{P(x=2,y=2)}{P(y=2)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$

$$P(X=1/\,Y<4)=\frac{P(x=1,y<4)}{P(y<4)}=\frac{P(x=1,y=2)P(x=1,y=3)}{P(y=2)+P(y=3)}=\frac{3}{8}$$

$$P\left(X=2\ \text{أو}\ Y=4\right)=P(X=2)+P(Y=4)-P(X=2,Y=4)=\frac{1}{2}$$