Centre Universitaire de Mila
Département de ST

2019/2020
Licence S4

Mathématique 4
TD 02

Exercice 1.

1. Soit la fonction $f(z) = z^2 + z$. Trouver $f(z_0)$ dans les cas suivantes :

   a) $z_0 = 1 + i$ b) $z_0 = 2 - i$ c) $z_0 = i$ d) $z_0 = -1$

2. Soit la fonction $f(z) = x^2 + iy^2$ avec $z = x + iy$ et $x, y \in \mathbb{R}$. Trouver $f(z_0)$ dans les cas suivantes :

   a) $z_0 = 1 + 2i$ b) $z_0 = 2 - 3i$ c) $z_0 = 0$ d) $z_0 = -i$

Exercice 2. Soit la fonction $f(z) = \|z\|$ et soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Démontrer que f est continue en z_0.

Exercice 3.

1. Soit la fonction $f(z) = z\,\mathrm{Im}(z)$. Montrer que f est dérivable en $z_0 = 0$ et calculer $f'(0)$.
2. Soit $z_0 = 0$ et soit la fonction

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z\,\mathrm{Re}(z)}{\|z\|} & si \quad z \neq 0 \\ 0 & si \quad z = 0 \end{cases}$$

   a) Étudier la continuité de f en z_0.

   b) Étudier la dérivabilité de f en z_0, que remarquez-vous ?

Exercice 4. Les fonctions suivantes sont-elles holomorphes ?

1. $f(z) = x + \dfrac{x}{x^2 + y^2} + i\left(y - \dfrac{y}{x^2 + y^2}\right)$
2. $f(z) = \|z\|^2 + 2z$
3. $f(z) = \dfrac{\|z\| + z}{2}$

Exercice 5. Soit la fonction

$$f(z) = a(x^2 - y^2) + i\ bxy + c \qquad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Trouvez les constants a, b, c, de sorte que f dérivable sur $\mathbb{C}$, puis récrire $f(z)$et $f'(z)$ par rapport à z.

Exercice 6. Trouver la fonction holomorphe $f(z)$ si

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(f(z)) &= u(x,y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3, \\ f(0) &= 0. \end{aligned}$$

Exercice 7. Soit la fonction $u(x, y) = \alpha x^2 - y^2 + xy$.

1. Trouver le nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que u soit harmonique.
2. Déterminer tous les fonction holomorphes $f(z)$ avec $\mathrm{Re}(f(z)) = u(x, y)$.
3. Déduire une conjuguée harmonique de u.

Indication (Exercice 6 - 7) : Soit $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ une fonction holomorphe, on dit que f est une fonction harmonique ssi u et v sont harmoniques, et on a :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad et \quad \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

On a également :

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

u et v sont dites *harmoniques conjuguées.*

Solutions

Exercice 3.

1. Par la formule de C.R.
2. a. Calculer et utiliser $\lim_{z\to 0} |f(z) - f(0)|$.
   b. Soit $z = x+iy$. Utiliser $y = \alpha x$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), et calculer $\lim_{z\to 0} \frac{|f(z)-f(0)|}{z-0}$.

Exercice 4. Utiliser la formule de C.R.

Exercice 5. Comme f holomorphe sur $\mathbb{C}$ alors f satisfait les conditions de C.R.

Exercice 6. Si $u(x, y)$ harmonique, alors il existe une fonction holomorphe f avec $\Re(f) = u(x, y)$.
Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, utiliser la formule de C.R. pour trouver v.