1. Cours 2: Ensembles et Applications.

1.1. Ensembles

1.1.1. Notion d'ensemble

Un ensemble A est une collection d'objets appelés éléments de A.
On écrit $x \in A$ pour dire que x est un élement de A
et on écrit $x \notin A$ pour dire que x n'est pas un élement de A.

On d´écrit un ensemble A en donnant la liste de tous ses éléments.
C.à.d:$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ (Appelée description en extension),
ou en caractérisant ses éléments parmi ceux d'un ensemble E déjà connu au moyen d'un prédicat $P(x)$.
C.à.d:$A = \{x \in E : P(x)\}$ (Appelée description en compréhension).

Remarque: $x \in A$ se lit x appartient à A.

Exemples:

1) L'ensemble des chiffres du système décimal $F = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$(Déscrit en extension)
2) L'ensembles des entiers naturels pairs $2\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{N} : 2 \text{ divise } x\}$(Déscrit en compréhension)
3) L'ensemble des réels positifs $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq 0\}$(Déscrit en compréhension)
4) $A = \{a \in \mathbb{Z} : |a| = -1 \}$ (Déscrit en compréhension)

Ici on a $3 \in F$, $7 \notin 2\mathbb{N}$, $18 \in 2\mathbb{N}$, $-4 \notin \mathbb{R}^+$ et $1 \notin A$.

1.1.2. Définitions:

Soient E, A et B des ensembles.
D1) On dit que B est un sous-ensemble de A, si tout élément de B est un élément de A.
Dans ce cas on écrit $B \subset A$ et dans le cas contraire on écrit $B \not\subset A$.
D2) La différence de A puis B est l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas des éléments de B.
Cet ensemble est noté $A \backslash B$. C.à.d: $A \backslash B = \{x \in A : x \notin B\}$.
D3) Si $A \subset E$, alors le complémentaire de A dans E est l'ensemble $E \backslash A$.
Cet ensemble est noté $C_E A$. C.à.d: $C_E A = \{x \in E : x \notin A\}$.
D4) L'ensemble qui ne contient aucun élément est appelé l'ensemble vide et est noté $\varnothing$.
On a par convention: $\varnothing \subset E$
D5) L'intersection de A et B est l'ensemble des éléments qui sont de A et de B en même temps.
Cet ensemble est noté $A \cap B$. C.à.d: $A \cap B = \{x : x \in A \text{ et } x \in B\}$.
D6) L'union de A et B est l'ensemble des éléments qui sont de A ou de B.
Cet ensemble est noté $A \cup B$. C.à.d: $A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

D7) Le produit cartésien de A *puis* B *est l'ensemble des couples* (a,b) *tels que* $a \in A$ *et* $b \in B$. *Cet ensemble est noté* $A \times B$. *C.à.d:* $A \times B = \{(a,b) : a \in A \text{ et } b \in B\}$.

Exemples: Soit $F = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,

1) On a $F \subset \mathbb{N}$ mais $F \not\subset 2\mathbb{N}$.

2) $F \backslash 2\mathbb{N} = \{1,3,5,7,9\}$, $(2\mathbb{N}) \backslash F = \{x \in 2\mathbb{N} : x \geq 10\} = \{10,12,14,16,...\}$

3) $C_{\mathbb{N}} F = \{x \in \mathbb{N} : x \geq 10\} = \{10,11,12,...\}$, $C_{\mathbb{N}}(2\mathbb{N}) = 2\mathbb{N}+1$ (les nombres impairs), $C_{\mathbb{Z}} \varnothing = \mathbb{Z}$.

4) $F \cap 2\mathbb{N} = \{0,2,4,6,8\}$, $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \{0\}$, $(C_{\mathbb{N}} F) \cap \{1,2,4\} = \varnothing$.

5) $\{0,2,4,6,8\} \cup \{1,2,4\} = \{0,1,2,4,6,8\}$, $F \cap 2\mathbb{N} = \{0,2,4,6,8\}$, $\mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- = \mathbb{R}$.

6) $\{0,2,4\} \times \{1,2\} = \{(0,1),(0,2),(2,1),(2,2),(4,1),(4,2)\}$

1.1.3. Ensembles et prédicats

Soient E, A *et* B *des ensembles, et soient* $P(x)$ *et* $Q(x)$ *des prédicats sur* E.
Si $A = \{x \in E : P(x)\}$ *et* $B = \{x \in E : Q(x)\}$, *alors:*
D'1) $B \subset A \Leftrightarrow [\forall x \in E, Q(x) \Rightarrow P(x)]$
D'2) $A \backslash B = \left\{x \in E : P(x) \wedge \overline{Q(x)}\right\}$
D'3) $C_E A = \left\{x \in E : \overline{P(x)}\right\}$
D'4) $\varnothing = \left\{x \in E : P(x) \wedge \overline{P(x)}\right\}$
D'5) $A \cap B = \{x \in E : P(x) \wedge Q(x)\}$
D'6) $A \cup B = \{x \in E : P(x) \vee Q(x)\}$
D'7) $A \times B = \{(x,y) : P(x) \wedge Q(y)\}$

Exemples:
Soient $A = \{x \in \mathbb{R} : \ x^2 > x\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$ et $C = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}$

1) On a $\forall x \in \mathbb{R} : \ (x > 1 \Rightarrow x^2 > x)$ (En multipliant $x > 1$ par x qui est positif), donc $B \subset A$.

2) $A \backslash B = \{x \in \mathbb{R} : (x^2 > x) \wedge (x \leq 1)\}$ et on a les équivalences

$$\begin{aligned}
(x^2 > x) \wedge (x \leq 1) &\Leftrightarrow [(x < 0) \vee (x > 1)] \wedge (x \leq 1) \\
&\Leftrightarrow [(x < 0) \wedge (x \leq 1)] \vee [(x > 1) \wedge (x \leq 1)] \\
&\Leftrightarrow [(x < 0) \wedge (x \leq 1)] \\
&\Leftrightarrow x < 0
\end{aligned}$$

Alors $A \backslash B = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$

3) $C_{\mathbb{R}} A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq x\} = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$

4) $A \cap B = B$, car $B \subset A$.

$A \cap C = \{x \in \mathbb{R} : (x^2 > x) \wedge (|x| \leq 1)\}$

$$\begin{aligned}(x^2 > x) \wedge (|x| \leq 1) &\Leftrightarrow [(x < 0) \vee (x > 1)] \wedge (-1 \leq x \leq 1) \\ &\Leftrightarrow [(x < 0) \wedge (-1 \leq x \leq 1)] \vee [(x > 1) \wedge (-1 \leq x \leq 1)] \\ &\Leftrightarrow (-1 \leq x < 0)\end{aligned}$$

Alors $A \cap C = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 0\}$

4) $A \cup B = A$, car $B \subset A$.

5) $A \cup C = \{x \in \mathbb{R} : (x^2 > x) \vee (|x| \leq 1)\}$

$$\begin{aligned}(x^2 > x) \vee (|x| \leq 1) &\Leftrightarrow [(x < 0) \vee (x > 1)] \vee (-1 \leq x \leq 1) \\ &\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Alors $A \cup C = \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

Remarques:

R1) Si $B \subset A$, on dit aussi que B est une partie de A ou B est contenu ou inclus dans A.
R2) $A \backslash B$ est aussi noté $A - B$
R3) $C_E A$ est aussi noté $\overline{A}$ ou A^C.
R4) $(a, b) \neq (b, a)$ si $a \neq b$.
R5) L'ensemble de toutes les parties d' un ensemble A est noté $\mathcal{P}(A)$.

Exemples: Soit $A = \{0, 1, 2\}$, alors
$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, A\}$

1.1.4. Propriétés

Soient A, B, C et E des ensembles. On a:
1) $A \cap A = A$ *et* $A \cup A = A$.
2) $A \cap B = B \cap A$ *et* $A \cup B = B \cup A$.
3) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ *et* $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
4) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ *et* $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
5) $A \cap \varnothing = \varnothing$ *et* $A \cup \varnothing = A$.
6) Si $A \subset E$, *alors* $A \cap C_E A = \varnothing$ *et* $A \cup C_E A = E$.
7) Si $A \subset E$ *et* $B \subset E$, *alors* $C_E (A \cap B) = (C_E A) \cup (C_E B)$ *et* $C_E (A \cup B) = (C_E A) \cap (C_E B)$.
8) Si $A \subset B$, *alors* $C_E B \subset C_E A$.

1.1.5. Partition d'un ensemble

Définition: *On appelle On appelle partition d'un ensemble E, toute famille $\mathcal{F}$ de parties non vides de E, telle que :*

1) Les éléments de $\mathcal{F}$ sont disjoints deux à deux, c.à.d: $\forall\ A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B = \varnothing$.
2) $\mathcal{F}$ est un recouvrement de E, c.à.d: $\underset{A\in\mathcal{F}}{\cup} A = E$.

Exemples: Soit $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, alors
$\mathcal{F} = \{\{0, 2\}, \{1, 4\}, \{3\}\}$ est une partition de B.
Mais $\mathcal{F}' = \{\{0, 1\}, \{3, 4\}, \{1, 2\}\}$ n'est pas une partition de B.

1.2. Applications

1.2.1. Notion d'application

Définition: *On appelle application d'un ensemble A dans un ensemble B, toute correpondance f, qui associe à chaque élément x de A un et un seul élément y de B.*

**On dit que A est l'ensemble de départ ou la source et que B est l'ensemble d'arrivée ou le but.*
**L'élément y associé à x par f s'appelle l'image de x et se note souvent $f(x)$ (C.à.d: $y = f(x)$).*

Remarques:
R1) Si $y = f(x)$, alors x s'appelle antécédent de y
R2) Une image y peut avoir deux antécédents, mais un antécédent ne peut jamais avoir deux images par une application.
R3) Pour dire que f est une application de A dans B et y est l'image de x par f on écrit:
$$f : A \to B \\ x \mapsto y$$

Exemples:
1) La correspodance $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ telle que $f(n) = n^2$ est une application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$.
On a $f(1) = 1,\ f(-2) = 4$ et $f(3) = 9$.

2) La correspodance $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \frac{1}{x-1}$ n'est pas une application, car 1 n'a pas d'image par h.

3) La correspondance qui associe à chaque mois le nombre possible de jours du mois n'est pas une application de l'ensemble M des mois dans $\mathbb{N}$, car elle associe à *février* les deux éléments 28 et 29.

4) La correspondance $Id_A : A \to A$ définie par $Id_A(x) = x$ est une application particulière appelée application identique de A.

1.2.2. Graphe, Image directe et Image réciproque d'un ensemble

Soit f une application de A dans B.
1) On appelle graphe de f l'ensemble -noté G_f - défini par $G_f = \{(x, f(x)) : x \in A\}$

2) Si $A_0 \subset A$, on appelle image directe de A_0 l'ensemble -noté $f(A_0)$- défini par $f(A_0) = \{f(x) : x \in A_0\}$
$*f(A)$ est appelé image de f et est noté $\mathrm{Im} f$. (c'est le cas $A_0 = A$)

3) Si $B_0 \subset B$, on appelle image réciproque de B_0 l'ensemble -noté $f^{-1}(B_0)$ - défini par $f^{-1}(B_0) = \{x \in A : f(x) \in B_0\}$

Remarque:
$G_f \subset A \times B$, $f(A_0) \subset B$ et $f^{-1}(B_0) \subset A$

Exemples :
1) Soit l'application $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ telle que $f(n) = n^2$.
$G_f = \{(n, n^2) \ / \ n \in \mathbb{Z}\}$
$f(\{-3, -1, 0, 3, 5\}) = \{0, 1, 9, 25\}$
$f^{-1}(\{4, 5, 6\}) = \{-2, 2\}$

2) Soit l'application $g : \mathbb{R} \backslash \{1\} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{1}{x-1}$
$G_g = \left\{\left(x, \frac{1}{x-1}\right) : \ x \in \mathbb{R} \backslash \{1\}\right\}$
$g([-2, 1[) = \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right]$
$g^{-1}([2, 4]) = \left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right]$

Propriétés *Soient $f : A \to B$ une application, A_1, A_2 des parties de A et B_1, B_2 des parties de B. On a les propriétés suivantes:*
1) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
2) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$
3) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
4) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
Preuve: (exercice)

1.2.3. Représentations des applications

La représentation d'une application $f : A \longrightarrow B$ dépend de la nature des ensembles A et B. Les représentations les plus utilisées sont les suivantes
1) Représentation au moyen d'une formule.

Exemple: Soit la fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ telle que $f(n) = n^2$.

2) Représentation au moyen d'une table de valeurs *(*utile dans le cas où A est fini*).*

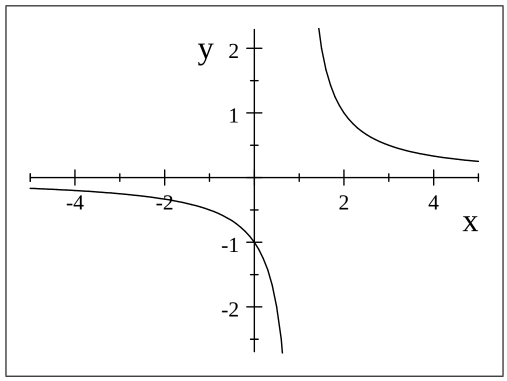
Exemple: Soit la fonction $g_1 : \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{N}$ telle que:

n	-2	-1	0	1	2	3
$g_1(n)$	4	1	0	1	4	9

.

3) Représentation au moyen d'un graphe.

Exemple: Soit la fonction $g_2 : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$ donnée par le graphe suivant:



1.2.4. Composition des applications

Soient $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ deux applications.
La composée des applications f puis g est l'application notée $g \circ f$ et définie par:

$$g \circ f : A \longrightarrow C \text{ et } \forall x \in A,\ g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Exemples:

1) Soient les applications $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ et $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ définies par $f(n) = n + (-1)^n$ et $g(n) = n^2$.
La composée de f puis g est la fonction $g \circ f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que:
$\forall n \in \mathbb{Z},\ g \circ f(n) = (n + (-1)^n)^2$.

2) Soient f_1 et f_2 les applications données par les tables suivantes

n	1	2	3	4	5	6
$f_1(n)$	5	1	3	1	4	4

n	1	2	3	4	5	6
$f_2(n)$	1	3	1	6	4	2

,

alors les applications $f_1 \circ f_2$ et $f_2 \circ f_1$ sont données par les tables suivantes

n	1	2	3	4	5	6
$f_1 \circ f_2(n)$	5	3	5	4	1	1

n	1	2	3	4	5	6
$f_2 \circ f_1(n)$	4	1	1	1	6	6

3) Soient f et g les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ données par $f(x) = 3x - 2$ et $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$

alors, $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g \circ f(x) = \frac{f(x)}{(f(x))^2+1} = \frac{3x-2}{(3x-2)^2+1}$

1.2.5. Egalité des applications

Deux applications $f_1 : A_1 \longrightarrow B_1$ *et* $f_2 : A_2 \longrightarrow B_2$ *sont égales, si* $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$ *et* $\forall\ x \in A_1,\ f_1(x) = f_2(x)$.
On écrit dans ce cas $f_1 = f_2$.

Exemples :

1) Les applications f et g définies de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$ par $f(n) = \cos(\pi n)$ et $g(n) = (-1)^n$ sont égales et on peut écrire $f = g$.

2) Les applications $f_1 \circ f_2$ et $f_2 \circ f_1$ données dans l'exemple 2 précédent ne sont pas égales.(C.à.d $f_1 \circ f_2 \neq f_2 \circ f_1$)

1.2.6. Applications injectives, surjectives, bijectives et applications réciproques

Définition: *Soit* $f : A \longrightarrow B$ *une application.*
On dit que f *est injective, si elle n'associe pas la même image à des éléments différents.*
C.à.d: (f *est injective*) $\Leftrightarrow (\forall\ (x, x') \in A \times A,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$

Exemples:

1) L' application $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $h(x) = 3x - 1$ est injective. En effet: Soient $(x, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} h(x) = h(x') &\Rightarrow 3x - 1 = 3x' - 1 \\ &\Rightarrow x = x' \end{aligned}$$

d'où h est injective.

2) L' application f_1 donnée par la table de valeurs suivante

n	1	2	3	4	5	6
$f_1(n)$	5	1	3	1	4	4

n'est pas injective, car $f_1(2) = f_1(4)$.

3) L'applications $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par $g(n) = n^2$ n'est pas injective. En effet: Soients $(n, n') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} g(n) = g(n') &\Rightarrow n^2 = n'^2 \\ &\Rightarrow (n = n') \vee (n = -n') \end{aligned}$$

On a par exemple $g(2) = g(-2)$ et $2 \neq -2$ d'où g n'est pas injective.

4) Soit l'application $g_2 : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$ définie par $g_2(x) = \frac{1}{x-1}$
En effet: Soient $(x, x') \in \mathbb{R}\setminus\{1\} \times \mathbb{R}\setminus\{1\}$

$$\begin{aligned} g_2(x) = g_2(x') &\Rightarrow \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x'-1} \\ &\Rightarrow x - 1 = x' - 1 \\ &\Rightarrow x = x' \end{aligned}$$

d'où g_2 est injective.

Définition: *Soit $f : A \longrightarrow B$ une application.*
On dit que f est surjective, si tout élément de B possède au moins un antécédent de A.
C.à.d: (f est surjective) $\Leftrightarrow (\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x))$

Exemples:

1) Soit l' application $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $h(x) = 3x - 1$.
Soit $y \in \mathbb{R}$. Existe t-il un $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = h(x)$?

$$\begin{aligned} y = h(x) &\Leftrightarrow y = 3x - 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{y+1}{3} = x \end{aligned}$$

Il est clair que $x = \frac{y+1}{3}$ existe dans $\mathbb{R}$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Donc h est surjective.

2) L'application $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par $g(n) = n^2$.
Soit $m \in \mathbb{N}$. Existe t-il un $n \in \mathbb{Z}$ tel que $m = g(n)$?

$$m = g(n) \Leftrightarrow m = n^2$$

Pour $m = 5$ on ne peut pas trouver $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n^2 = 5$. D'où g n'est pas surjective.

3) Soit l'application $g_2 : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$ définie par $g_2(x) = \frac{1}{x-1}$.
Soit $y \in \mathbb{R}$. Existe t-il un $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ tel que $y = g_2(x)$?

$$\begin{aligned} y = g_2(x) &\Leftrightarrow y = \frac{1}{x-1} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{y} + 1 \text{ si } y \neq 0 \end{aligned}$$

On remarque que $y = 0 \in \mathbb{R}$ et il n'a pas d'antécédent $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$. D'où g_2 n'est pas surjective.

Définition: *Soit $f : A \longrightarrow B$ une application.*
On dit que f est bijective, si f est injective et surjective.

Exemples:

1) L' application $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $h(x) = 3x - 1$ est bijective d'après ce qui précède.

2) L'application $g_2 : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$ définie par $g_2(x) = \frac{1}{x-1}$ n'est pas bijective, car elle n'est pas surjective malgrès qu'elle est injective.

Définition: *Soit $f : A \longrightarrow B$ une application bijective. On appelle application* *réciproque de* f *l'application -notée* f^{-1} *- définie par:* $f^{-1} : B \longrightarrow A$ *et* $f^{-1}(y) = x$ *où* x *est l'antécédent de* y *par* f *(C.à.d* $f(x) = y$*).*

Exemple :
L'application $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $h(x) = 3x - 1$ est bijective et son application réciproque est $h^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $h^{-1}(y) = \frac{y+1}{3}$.