المحور 03: النماذج الخطية للسلاسل الزمنية

المحاضرة 06

- **حالة AR(2):**

يكتب نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة 2 بالصيغة التالية:

$$Y_t = \emptyset_1 Y_{t-1} + \emptyset_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

بنفس الخطوات السابقة نجد:

$$\emptyset(L) = 1 - \emptyset_1 L - \emptyset_2 L^2$$
$$\Longrightarrow \theta(L) = \emptyset^{-1}(L) = (1 - \emptyset_1 L - \emptyset_2^2 L^2)^{-1}$$

شروط الاستقرار:

$$\emptyset(L) = 0 \Rightarrow 1 - \emptyset_1 L - \emptyset_2 L^2 = 0$$

نضرب في (-1) لنحصل على معادلة من الدرجة الثانية من الشكل $aX^2 + bX + c$:

$$\emptyset_2 L^2 + \emptyset_1 L - 1 = 0$$

نقوم بحل هذه المعادلة بطريقة المميز Δ، حيث المميز عبارة عن: $\Delta = b^2 - 4ac$

وبالتالي في حالتنا هذه:

$$\Delta = \emptyset_1^2 + 4\emptyset_2$$

$$L_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{L_1} = \frac{-\emptyset_1 + \sqrt{\emptyset_1^2 + 4\emptyset_2}}{2\emptyset_2}$$

$$L_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{L_2} = \frac{-\emptyset_1 - \sqrt{\emptyset_1^2 + 4\emptyset_2}}{2\emptyset_2}$$

إذن حتى يتحقق شرط الاستقرارية يجب أن يكون:

$$|L_1| > 1 \quad , \quad |L_2| > 1$$

$$\begin{cases} \emptyset_2 + \emptyset_1 < 1 \\ \emptyset_2 - \emptyset_1 < 1 \\ |\emptyset_2| < 1 \end{cases}$$

- **دالة الارتباط الذاتي ACF:**

تعطى دالة الارتباط الذاتي بالشكل:

$$\boldsymbol{\rho(k)} = \frac{\boldsymbol{\gamma_k}}{\boldsymbol{\gamma_0}} = \begin{cases} \mathbf{1} & \boldsymbol{k = 0} \\ \boldsymbol{\emptyset_1^k} & \boldsymbol{k=1,2,3.....} \end{cases}$$

γ_0: تباين السيرورة، بينما γ_k تمثل التبيانات المشتركة حيث: $\gamma_k = \emptyset_1^k \gamma_0$

ملاحظة جد مهمة:

$$\boldsymbol{\gamma_k = \gamma_{(-k)}}$$

III. نماذج المتوسطات المتحركة MA (Moving Average Models):

1− الشكل العام $\boldsymbol{MA(q)}$:

نموذج المتوسطات المتحركة من الرتبة q يكتب بالشكل التالي:

$$MA(q):\;\; Y_t = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} \dots\dots\dots + \theta_3\varepsilon_{t-q}$$

$$= \left(1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots \dots\dots + \theta_q L^2\right)\varepsilon_t$$

$$\boldsymbol{Y_t \;=\; \theta(L)\varepsilon_t} \qquad , \qquad \boldsymbol{\theta(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots \dots\dots + \theta_q L^2}$$

2− الشكل المصفي:

لدينا مما سبق:

$$Y_t = \emptyset(L)\varepsilon_t \dots\dots\dots (1)$$

$$Y_t = \theta(L)\varepsilon_t \dots\dots\dots (2)$$

$$\Rightarrow \emptyset(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots \dots\dots + \theta_q L^2$$

وبالتالي نلاحظ أنه في حالة $\boldsymbol{MA(q)}$ كثير الحدود $\emptyset(L)$ محدود، إذن شروط الاستقرارية محققة دائما (بمعنى نماذج المتوسطات المتحركة مستقرة بالتعريف ولا تحتاج إلى دراسة الاستقرارية). بينما قابلية الانعكاس (كتابة MA في شكل AR) فتحتاج إلى شروط يجب توفرها.

❖ **− نتائج:**

- تباين السيرورة Y_t والممثل بواسطة $\boldsymbol{\gamma_0}$ هو:

$$\boldsymbol{V(Y_t) = \gamma_0 \;=\; \sigma^2\left[1 + \sum_{j=1}^{q}\theta_j^2\right]}$$

- التباينات المشتركة لـ k فترة تأخير تعطى على الشكل التالي:

$$\mathrm{COV}(Y_t, Y_{t-k}) = \gamma_k = 0 \qquad k > 1$$

- دالة الارتباط الذاتي من الدرجة q تعطى بالشكل التالي:

$$\rho(k) = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} \frac{\sum_{i=k}^{q} \theta_i \theta_{i-k}}{\sum_{i=0}^{q} \theta_i^2} & k = 0, \pm 1 \quad \ldots\ldots \quad \pm q \\ 0 & k > q \end{cases}$$

مثال عددي:

إذا كانت لديك السيرورة التالية MA(2)، حيث ε_t شوشرة بيضاء $\varepsilon_t \backsim WN(0, \sigma^2)$:

$$Y_t = \varepsilon_t + 0.6\varepsilon_{t-1} - 0.3\varepsilon_{t-2}$$

أوجد المتوسط والتباين والتباينات المشتركة ، ثم أوجد معاملات دالة الارتباط الذاتي.

الحل:

- **المتوسط أو التوقع:**

$$E(Y_t) = 0$$

- **التباين:**

$$V(Y_t) = \gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma^2 = (1 + 0.36 + 0.9)\sigma^2 = 1.45\sigma^2$$

- **التباينات المشتركة:**

$$COV(Y_t, Y_{t-1}) = \gamma_1 = \sigma^2 \sum_{i=1}^{2} \theta_i \theta_{i-1} = (\theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_1)\sigma^2 = 0.42\sigma^2$$

$$COV(Y_t, Y_{t-2}) = \gamma_2 = \sigma^2 \sum_{i=2}^{2} \theta_i \theta_{i-k} = (\theta_2\theta_0)\sigma^2 = -0.3\sigma^2 = 0.3\sigma^2$$

- **معاملات دالة الارتباط الذاتي:**

$$\rho(k) = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

$$\rho(0) = \frac{\gamma_0}{\gamma_0} = 1$$

$$\rho(1) = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{0.42\,\sigma^2}{1.45\,\sigma^2} = 0.27$$

$$\rho(2) = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \frac{-0.3\,\sigma^2}{1.45\,\sigma^2} = 0.19$$

$$k > 2 \quad \Rightarrow \quad \rho(k) = 0$$

3- قابلية الانعكاس في نماذج MA: