Fiche sur les systèmes différentiels linéaires (Version 2015/2016)

Université de Batna, Département de Mathématiques,

3 ème année Mathématiques (Module EDO)

Dans tout ce qui suit : I est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Pour tout $i, j = \overline{1,n}$, a_{ij} et b_i des fonctions continues définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.
$$\begin{aligned} A : I &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t &\longmapsto A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=\overline{1,n}} \end{aligned}$$

et
$$\begin{aligned} B : I &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Définitions

1. Le système
$$Y'(t) = A(t)Y(t), t \in I \tag{E}$$
est appellé système différentiel linéaire du premier ordre à coefficients variables avec second membre.

2. Le système
$$Y'(t) = A(t)Y(t), t \in I, \tag{H}$$
est appellé système différentiel linéaire du premier ordre à coefficients variables homogène (ou sans second membre). On dit que (H) est le système homogène associé à (E).

3. *Notation :* Pour simplifier, on écrit (E) comme suit $Y' = A(t)Y + B(t)$ et le système (H) comme suit $Y' = A(t)Y$.

4. *Notation :* La solution du $\begin{cases} Y' = A(t)Y, \\ Y(t_0) = Y_0, \end{cases}$ est notée par $Y(., t_0, Y_0)$.

5. Soient $t, t_0 \in I$. Considérons la fonction f_{t,t_0} définie de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$ par $f_{t,t_0}(Y_0) =$

$Y(t, t_0, Y_0)$. La matrice associée à f_{t,t_0} est appellée la matrice résolvante de (H) (où brièvement la résolvante). On la note par $R(t, t_0)$.

6. Soient $Y_1, Y_2, ..., Y_n \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$. On dit que $\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$ est un système fondamental de (H) si $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ sont des solutions de (H) qui sont linéairement indépendants.
7. La matrice dont ces colonnes représente un système fondamentale de (H) s'appelle la matrice fondamentale de (H).
8. Le wronskien d'un système fondamental $\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$, noté W, est le déterminant de la matrice dont les colonnes sont $Y_1, Y_2, ...$ et Y_n ie. pour tout $t \in I : W(t) := \det [Y_1(t) ... Y_n(t)]$.
9. L'exponentielle de la matrice A, noté e^A, est la quantité $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$.
10. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que N est une matrice nilpotente d'indice $m \in \mathbb{N}^*$ si $N^{m-1} \neq 0_n$ et $N^m = 0_n$.

Résultats

1. Le système (S) donné comme suit

$$\left\{\begin{array}{l} y_1'(t) = a_{11}(t) y_1(t) + a_{12}(t) y_2(t) + ... + a_{1n}(t) y_n(t) + b_1(t), \\ y_2'(t) = a_{21}(t) y_1(t) + a_{22}(t) y_2(t) + ... + a_{2n}(t) y_n(t) + b_2(t), \\ \vdots \\ y_n'(t) = a_{n1}(t) y_1(t) + a_{n2}(t) y_2(t) + ... + a_{nn}(t) y_n(t) + b_n(t). \end{array}\right. \quad \forall t \in I \qquad (S)$$

est équivalent au système (E).

2. Toutes équation d'ordre deux s'écrit sous la forme du système (E).
3. Toutes les solutions maximales de (E) et de (H) sont globales.
4. Le système

$$\left\{\begin{array}{l} Y' = A(t) Y + B(t), \\ Y(t_0) = Y_0, \end{array}\right. \qquad (E.D.)$$

admet une solution globale unique.

5. Le système
$$\begin{cases} Y' = A(t)\,Y, \\ Y(t_0) = Y_0, \end{cases} \tag{H.D.}$$
admet une solution globale unique.
6. L'ensemble des solutions de (H), noté S_H, est un espace vectoriel de dimension n.
7. Soit Y_p une solution de (E). L'ensemble des solutions de (E), noté S_E, est donnée par $S_E = S_H + Y_p$.
8. *Propriété algébrique :* Soient $C_1, C_2 \in M_n(\mathbb{R})$. On a
$$(\forall X \in \mathbb{R}^n, C_1 X = C_2 X) \Longrightarrow (C_1 = C_2).$$
9. Soient $t, t_0 \in I$. La fonction f_{t,t_0} définie de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$ par $f_{t,t_0}(Y_0) = Y(t, t_0, Y_0)$ est linéaire.
10. Pour tout $t, t_0 \in I$ on a $R(t, t_0) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $R(t_0, t_0) = I_n$, $R(t, t_0)\,Y_0 = Y(t, t_0, Y_0)$, $\frac{d}{dt}R(t, t_0) = A(t)\,R(t, t_0)$ et $\frac{d}{dt}R(t_0, t) = -R(t_0, t)\,A(t)$.
11. Pour tout $t, s, r \in I$: $R(t, s)\,R(s, r) = R(t, r)$, $R(t, s)$ est inversible et on a $(R(t, s))^{-1} = R(s, t)$.
12. $R(., t_0)$ est une solution dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du système
$$\begin{cases} M' = A(t)\,M, \\ M(t_0) = I_n. \end{cases} \tag{S.R.}$$
13. Si $D(., t_0)$ une solution du système $(S.R.)$ alors $D(t, t_0) = R(t, t_0)$ pour tout $t, t_0 \in I$.
14. Soient $Y_1, Y_2, ..., Y_n \in S_H$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :
    (a) $\forall t \in I : W(t) \neq 0$.
    (b) $\exists t_0 \in I : W(t_0) \neq 0$.
    (c) $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ sont linéairement indépendants.

15. S'il existe $t_0 \in I$ tel que $Y_1(t_0), Y_2(t_0), ..., Y_n(t_0)$ sont L. I alors $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ sont L. I.

16. Si $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ sont L. I alors on ne peut rien dire sur l'indépendance linéaire de $Y_1(t), Y_2(t), ..., Y_n(t)$ avec $t \in \mathbb{R}$.

17. Si $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ sont des solutions d'un système $Y' = A(t)Y$ et qui sont L. I. alors pour tout $t \in I$ on a $Y_1(t), Y_2(t), ..., Y_n(t)$ sont L. I..

18. Soit $\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$ un système fondamental de (H). On a $S_H = [\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}]$.

19. Soit M une matrice fondamentale du système (H). Alors pour tout $t, t_0 \in \mathbb{R}$ on a la matrice $M(t)$ est inversible, $M'(t) = A(t)M(t)$ et $R(t, t_0) = M(t)M^{-1}(t_0)$.

20. Soient M_1 et M_2 deux matrices fondamentales de (H). Alors il existe une matrice constante et inversible C telle que $M_1 = M_2C$.

21. Soient $A_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $A_2 \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$. On a $e^{\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{A_1} & 0 \\ 0 & e^{A_2} \end{pmatrix}$.

22. On a $e^{0_n} = I_n$. Ici, 0_n représente la matrice nulle.

23. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors e^A est une matrice inversible, $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$, la fonction : $\begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t \longmapsto e^{tA} \end{array}$ est dérivable et on a $\left(e^{tA}\right)' = Ae^{tA}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

24. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A et B commutent, c. à dire $AB = BA$, alors $e^{A+B} = e^Ae^B$.

25. Il existent des matrices A et B telles que $e^{A+B} \neq e^Ae^B$.

26. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit P une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. On a $e^{PAP^{-1}} = Pe^AP^{-1}$.

27. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $e^{\lambda I_n + A} = e^\lambda e^A$.

28. Toute matrice, triangulaire supérieure dont les éléments de la diagonale sont nuls, est nilpotente.

29. Soit N une matrice nilpotente d'indice $m \in \mathbb{N}^*$. On a $e^N = I_n + \frac{N}{1!} + ... + \frac{N^{m-1}}{(m-1)!}$.

30. Si pour tout $t, s \in I$ on a $A(t)\, A(s) = A(s)\, A(t)$ alors pour tout $t, t_0 \in I$ on a $R(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} A(u) du}$.

31. Il existent des matrices $A(t)$ tellesque $R(t, t_0) \neq e^{\int_{t_0}^{t} A(u) du}$.

32. Si pour tout $t \in I$ on a $A(t) = A$ alors $R(t, t_0) = e^{(t-t_0)A}$.

33. Si λ est une valeur propre réelle de A et V le vecteur propre associé. Alors la fonction définie sur $I = \mathbb{R}$ par $Y(t) = Ve^{\lambda t}$ est une solution de (H).

34. Si A admet n vecteurs propres linéairement indépendant $V_1, V_2, ..., V_n$ associés aux valeurs propres réelles $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ alors la solution générale de (H) est donnée, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par $Y(t) = c_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 V_2 e^{\lambda_2 t} + ... + c_n V_n e^{\lambda_n t}$ avec $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$.

35. Si A admet n valeurs propres réelles distinctes $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ alors la solution générale de (H) est donnée, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par $Y(t) = c_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 V_2 e^{\lambda_2 t} + ... + c_n V_n e^{\lambda_n t}$ avec $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$. Ici, $V_1, V_2, ..., V_n$ sont les vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.

36. Si $\lambda = \mu + i\nu$ $(\nu \neq 0)$ est une valeur propre complexe de A et $V = a + ib$ le vecteur propre associé. Alors les deux fonctions définies sur $I = \mathbb{R}$ par $Y_1(t) = \mathrm{Re}\left(Ve^{\lambda t}\right) = e^{\mu t}(a \cos \nu t - b \sin \nu t)$ et $Y_2(t) = \mathrm{Im}\left(Ve^{\lambda t}\right) = e^{\mu t}(a \sin \nu t + b \cos \nu t)$ sont des solutions de (H) qui sont linéairement indépendants.

37. Si $\lambda = \mu + i\nu$ $(\nu \neq 0)$ est une valeur propre complexe de A alors $\overline{\lambda} = \mu - i\nu$ est aussi une valeur propre complexe de A.

38. On suppose que A admet $2p = n$ valeurs propres complexes distinctes $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p, \lambda_{p+1} = \overline{\lambda_1}, \lambda_{p+2} = \overline{\lambda_2}, ..., \lambda_{2p} = \overline{\lambda_p}$. Pour $i = 1, ..., p$, on considère Y_1^i et Y_2^i, les deux solutions linérairement indépendantes associées à la valeur propre complexe λ_i, définies par $Y_1^i(t) = \mathrm{Re}\left(V_i e^{\lambda_i t}\right)$ et $Y_2^i(t) = \mathrm{Im}\left(V_i e^{\lambda_i t}\right)$. Alors la solution générale de (H) est donnée, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par $Y(t) = \sum_{i=1}^{i=p} c_1^i Y_1^i(t) + \sum_{i=1}^{i=p} c_2^i Y_2^i(t)$, avec $c_1^i, c_2^i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., p$.

Test

1. Montrer que le système $\begin{cases} y_1'(t) = ty_1(t) + y_2(t) - 1, \\ y_2'(t) = \cos t y_1(t) + e^t y_2(t). \end{cases}$ $t \in I = \mathbb{R}$ s'écrit sous la forme $Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$, pour tout $t \in I = \mathbb{R}$.

2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $Y_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y_2(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$ et $A(t) = \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}$.
   Montrer que $\{Y_1, Y_2\}$ est un système fondamental de $Y' = A(t)Y$. Déterminer une matrice fondamentale de $Y' = A(t)Y$.

3. Utiliser la définition, pour calculer l'exponentielle de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Montrer que $N = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ est une matrice nilpotente d'indice $m = 2$.

5. Calculer l'exponentielle de $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Calculer la résolvante du système donné par la matrice A définie par $A(t) = \begin{pmatrix} t & -t^2 \\ t^2 & t \end{pmatrix}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

7. On considère la matrice définie par $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Calculer $e^{\int_{t_0}^{t} A(u)du}$ et $R(t, t_0)$. Que peut on déduire.

8. Résoudre les systèmes $Y' = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} Y$, $\begin{cases} Y' = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} Y, \\ Y(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$