4- تقارب توزيع مربع كاي للتوزيع الطبيعي المعياري:

- رأينا سابقا في التوزيعات الاحتمالية المستمرة أن توزيع مربع كاي يعتبر كحالة خاصة من توزيع Gamma بالمعلمتين $\alpha = \frac{\vartheta}{2}$ و $\beta = 2$. ودالة كثافته الاحتمالية من الشكل:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\vartheta}{2}\right)(2)^{\frac{\vartheta}{2}}} x^{\frac{\vartheta}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}} \qquad , \boldsymbol{x \geq 0}$$

- بالإضافة لذلك رأينا سابقا بأن توزيع مربع كاي له علاقة بالتوزيع الطبيعي، وفي هذا الإطار نعيد التذكير بالنظرية التالية: **إذا كانت المتغيرات العشوائية $X_1, X_2, \ldots, X_\vartheta$ مستقلة عن بعضها وكل متغيرة تتبع التوزيع الطبيعي المعياري $N(0,1)$، فإن: $\sum_{i=1}^{\vartheta} X_i^2 \sim \chi_\vartheta^2$**. وبالتالي حسب هذه النظرية، فإن كل واحد من هذه المتغيرات بقياسات $x_1, x_2, \ldots, x_\vartheta$ يمكن أن تحول إلى قياسات تتبع مربع كاي بدرجة حرية ϑ_i .
- يمكن حساب احتمال خاص بتوزيع مربع كاي بواسطة التوزيع الطبيعي المعياري إذا توفر شرط درجة الحرية درجة الحرية أكبر أو يساوي 30 $(\vartheta \geq 30)$، حيث المتوسط $\mu = \vartheta$ والتباين $\sigma^2 = 2\vartheta$. وبذلك Z المعيارية تكون مساوية لـ: $\boldsymbol{Z = \frac{\chi^2 - \vartheta}{\sqrt{2\vartheta}}}$.

5- تقارب توزيع مربع كاي لتوزيع Gamma:

- كما سبق وقلنا أن توزيع مربع كاي يعتبر حالة خاصة من توزيع Gamma بالمعلمتين $\alpha = \frac{\vartheta}{2}$ و $\beta = 2$. و $\beta = 2$. ودالة كثافته الاحتمالية من الشكل:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\vartheta}{2}\right)(2)^{\frac{\vartheta}{2}}} x^{\frac{\vartheta}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}} \qquad , \boldsymbol{x \geq 0}$$

حيث:

$$\boldsymbol{\Gamma(\alpha)} = \Gamma\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \int_0^\infty \boldsymbol{x^{\frac{\vartheta}{2}-1}} \; \boldsymbol{e^{-\frac{x}{2}}} \; d_x$$
$$\boldsymbol{\Gamma(\alpha)} = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$$
$$\boldsymbol{\Gamma(\alpha)} = (\alpha - 1)!$$

- **بعض خصائص دالة Gamma:**

$\boldsymbol{\Gamma(-1)} = (-2)! = \infty \qquad ,$

$\boldsymbol{\Gamma(0)} = (-1)! = \infty \qquad ,$

$\boldsymbol{\Gamma(1) = (0)! = 1}$

$\boldsymbol{\Gamma(2)} = (1)! = \boldsymbol{1}$

$\boldsymbol{\Gamma(3)} = (2)! = \boldsymbol{2}$

$\boldsymbol{\Gamma(4) = (3)! = 6}$

$\boldsymbol{\Gamma(0.5) = \sqrt{\pi} = 1.7724}$

$\boldsymbol{\Gamma(-0.5) = -2\sqrt{\pi}}$

$\boldsymbol{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \Gamma(1.5) = 0.5\Gamma(0.5) = \boldsymbol{0.5\sqrt{\pi}}$

$\boldsymbol{\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}}$

ملاحظة:

كل هذه القيم محسوبة بواسطة التكامل.

- **تمرين (يتم حله حضوريا مع الطلبة):**

إذا كانت $\chi \sim \chi_3^2$. المطلوب:

- أكتب دالة التوزيع الاحتمالي.
- باستخدام خصائص دالة قاما، أوجد $\Gamma(\alpha)$ و $\Gamma(\beta)$.