Cours de la programmation linéaire
Pour les étudiants de la première année master mathématiques appliquées et mathématiques fondamentales
Département de mathématiques et informatiques
Université abdelhafid BOUSSOUF MILA
Anné universitaire 2023/2024

Chapitre 5

Table des matières

introduction **3**

1 La dualité en programmation linéaire **3**

1.1 Introduction et généralités 3

1.2 Relations entre le programme primal et dual 3

1.3 Théorèmes et propriétés fondamentales de la dualité 6

1.3.1 Théorème fort des écarts complémentaires 7

1.4 Algorithmes dual et primal-dual 7

1

La dualité en programmation linéaire

1.1 Introduction et généralités

La dualité est l'un des concepts essentiel en programmation mathématique, en particulier, en programmation linéaire, elle joue un role fondamental dans la résolution des programmes et dans l'analye post-optimale est sensitive. Le programme dual a une interprétation économique importante. De plus d'inportantes propriétés mathématique liant les deux programmes (primal et dual).

1.2 Relations entre le programme primal et dual

Considérons le programme linéaire, appelé primal suivant :

$$MinZ = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{1,1} \quad x_1 + a_{1,2} \quad x_2 + ... + a_{1,n} \quad x_n \quad \geq \quad b_1 \\ . \qquad\qquad\qquad\qquad . \\ . \qquad\qquad\qquad\qquad . \\ . \qquad\qquad\qquad\qquad . \\ a_{h,1} \quad x_1 + a_{h,2} \quad x_2 + ... + a_{h,n} \quad x_n \quad \geq \quad b_h \\ a_{h+1,1} \quad x_1 + a_{h+1,2} \quad x_2 + ... + a_{h+1,n} \quad x_n \quad = \quad b_{h+1} \\ . \qquad\qquad\qquad\qquad . \\ . \qquad\qquad\qquad\qquad . \\ . \qquad\qquad\qquad\qquad . \\ a_{m,1} \quad x_1 + a_{m,2} \quad x_2 + ... + a_{m,n} \quad x_n \quad = \quad b_m \\ x_1, \quad x_2, ... \quad x_n \in E, x_j \geq 0, j = 1...k x_j \in R, j = k+1...n \end{cases}$$

On associe à chaque contrainte i($i = \overline{1,m}$) une variable u_i appelée variable duale. Le programme dual associé est :

$$MaxW = b_1u_1 + b_2u_2 + ... + b_mu_m$$

$$\begin{cases} a_{1,1} \quad u_1 + a_{2,1} \quad u_2 + ... + a_{m,1} \quad u_m \quad \leq \quad c_1 \\ . \qquad\qquad\qquad\qquad ... \\ . \qquad\qquad\qquad\qquad ... \\ . \qquad\qquad\qquad\qquad ... \\ a_{1,k} \quad u_1 + a_{2,k} \quad u_2 + ... + a_{m,k} \quad u_m \quad \geq \quad c_k \\ a_{1,k+1} \quad u_1 + a_{2,k+1} \quad x_2 + ... + a_{m,k+1} \quad u_m \quad = \quad c_{k+1} \\ . \qquad\qquad\qquad\qquad . \\ . \qquad\qquad\qquad\qquad . \\ . \qquad\qquad\qquad\qquad . \\ a_{1,n} \quad x_1 + a_{2,n} \quad u_2 + ... + a_{m,n} \quad u_m \quad = \quad c_n \\ x_1, \quad x_2, ... \quad x_n \in E, u_i \geq 0, i = 1...h u_i \in R, i = h+1...m \end{cases}$$

De cette définition on tire les propriétés suivantes :

— Cette transformation est involutive (le dual du dual est le primal).
— Une variable primale non négative correspond à une contrainte inégalité dans le dual et inversement.
— Une variable primale non astrinte correspond à une contrainte égalité dans le dual est inversement.
— La matrice des contraintes du dual est la transposée du primal.
— les coefficients dans la fonction objectif du primal sont les seconds membres des contraintes du dual et inversement.
— Un problème de minimisation avec contraintes " $\geq$ " ou " $=$ " du primal devient un problème de maximisation avec contraintes " $\leq$ " ou " $=$ " du dual et inversement.

Exemple 1.1 *Soit le programme linéaire primal suivant :*

$$MaxZ = 4x_1 + 6x_2 + 20x_3 + 17x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 \leq 10 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_3, x_4 \in R \end{cases}$$

et soit son programme linéaire dual :

$$MinW = 10u_1 + 4u_2$$

$$\begin{cases} u_1 + 0u_2 \geq 4 \\ 0u_1 + 2u_2 \geq 6 \\ u_1 + 2u_2 = 20 \\ 2u_1 + u_2 = 17 \\ u_1 \geq 0 \\ u_2 \in R \end{cases}$$

Remarque 1.1 *L'introduction des variables d'écart dans la forme primale ne modifie pas la forme duale, en effet :*

$$MinZ = CX$$

$$\begin{cases} AX \geq B \\ X \geq 0 \end{cases} \qquad (Primal)$$

$$MaxW = UB$$

$$\begin{cases} UA \leq C \\ U \geq 0 \end{cases} \qquad (Dual)$$

En introduisant les variables d'écarts

$$MinZ = CX$$

$$\begin{cases} AX_E \geq B \\ X \geq 0 \\ E \geq 0 \end{cases} \qquad (Primal)$$

$$MaxW = UB$$
$$\begin{cases} UA \leq C & (Dual) \\ -U \leq 0 \\ U \in R \end{cases}$$

1.3 Théorèmes et propriétés fondamentales de la dualité

Lemme 1.1 *Soient les programmes duaux suivants :*

$$MinZ = CX$$
$$\begin{cases} AX \geq B & (P) \\ X \geq 0 \end{cases}$$

$$MaxW = UB$$
$$\begin{cases} UA \leq C & (D) \\ U \in R \end{cases}$$

soit $x^{\sim}$ une solution réalisable de (P) et $u^{\sim}$ solution de (D) alors on a $cx^{\sim} \geq u^{\sim}b$

En effet,
Soit $x^{\sim}$ une solution réalisable de (P) et $u^{\sim}$ solution de (D), on a

$$\begin{cases} AX^{\sim} = B & (P) \\ & (\star)X^{\sim} = 0 \end{cases}$$

et $U^{\sim}$A $\leq$ C $(\star\star)$, en multipliant les deux membres de $(\star)$ à gauche par $U^{\sim}$ et les deux membres de $(\star\star)$ à droite par $X^{\sim}$ on obtient $U^{\sim}AX^{\sim}$ $=U^{\sim}B$ et $U^{\sim}AX^{\sim} \leq$ c$x^{\sim}$ d'ou le résultat $U^{\sim}B \leq$ c$x^{\sim}$

Lemme 1.2 *Soit $X^{\star}$ une solution réalisable de (P) et $U^{\star}$ solution de (D) vérifiant $U^{\star}$ $B=$ $X^{\star}$ C alors $X^{\star}$ et $U^{\star}$ sont optimales respectivement pour (P) et (D).*

En effet, posons $P = \{X/AX = BetX \geq 0\}$ $D = \{U/UA \leq C\}$, soient $X^\star$ solution réalisable du programme primal et $U^\star$ solution réalisable du programme dual vérifiant $U^\star$ B= $CX^\star$, $\forall x \in P$, $CX^\star \geq U^\star V$ (D'après le lemme)
Par hypothèse $U^\star$ B= $CX^\star$, $\forall x \in P$, $CX \geq CX^\star \Longrightarrow X^\star$ est optimal pour (P). Inversement, $\forall x \in D$ $UB \leq CX^\star = U^\star$ B alors $U^\star$ est optimale pour (D)

1.3.1 Théorème fort des écarts complémentaires

Si la solution optimale primale $X^\star$ existe et est finie alors celle du dual $U^\star$ existe et est finie, à l'optimum les valeurs de la fonction objectifs sont égales, $U^\star$ B= $CX^\star$.
Si la solution optimale du primal est infinie alors le dual est irréalisable (La réciproque n'est pas vraie)
En effet,

$$MinZ = CX$$

$$\begin{cases} AX \geq b \\ X \geq 0 \end{cases} \qquad (P)$$

$$MaxW = UB$$

$$\begin{cases} UA \leq C \\ U \in R \end{cases} \qquad (D)$$

$$X = \begin{matrix} X_B \\ X_N \end{matrix}$$

A=(B,N), $C = (C_B,C_N)$, $X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N$, $Z = C_B B^{-1}b + (C_N - C_B B^{-1}N)X_N$ à l'optimum, on aura (P) s'écrit

$$MinZ = C_B X_B + C_N X_N$$

$$\begin{cases} BX_B + NX_N = b \\ X \geq 0 \end{cases} \qquad (P)$$

$X_B^\star = B^{-1}B$,$Z^\star = C_B B^{-1}b$, $X_N^\star = 0$, $\forall j \in J$ (l'indice des variables hors base) posons $U^\star = C_B B^{-1}$, montrons que $U^\star$ est une solution de (D) :

1.4 Algorithmes dual et primal-dual