- **التوزيع الهندسي (Geometric Distribution):**

إذا كررنا تجربة برنولي بشكل لانهائي إلى غاية الحصول على النتيجة (الحدث المطلوب) بحيث أن احتمال النجاح هو p والفشل هو q، وكانت المتغيرة العشوائية X تمثل عدد تجارب برنولي المتتالية (بما فيها المرة التي حصل فيها النجاح)، فإن التوزيع الاحتمالي للمتغيرة العشوائية يطلق عليه بالتوزيع الهندسي، وتعطى دالة توزيعه الاحتمالي بالشكل:

$$\boldsymbol{f(x) = P(X = x) = p.q^{x-1}} \qquad \boldsymbol{x = 1, 2, 3 \ldots}$$

واختصارا هذا التوزيع يمكن كتابته بالشكل:

$$X \backsim G(p)$$

أي X يتبع التوزيع الهندسي ذو المعلمة p.

- يعطي التوقع (المتوسط الحسابي) والتباين لهذا التوزيع بالصيغ التالية:

$$\boldsymbol{E(X) = {}^{1}/_{p}} \quad , \quad \boldsymbol{V(X) = {}^{q}/_{p^2}}$$

مثال:

نقوم بسحب كرة من إناء يحتوي على 25 كرة بيضاء و10 كريات صفراء، ثم نقوم بإعادتها في الإناء ونعيد العملية إلى غاية ظهور كرة بيضا. فما هو احتمال سحب كرة بيضاء في السحب العشرين.

الحل:

المتغيرة العشوائية **X** تمثل عدد مرات السحب حتى ظهور كرة بيضاء. نحن أمام تجارب لا نهائية من تجارب برنولي لأن كل سحب مستقل عن الآخر وكل سحب يحتوي على نتيجتين فقط، فإما الحصول على كرة بيضاء أو صفراء بمعنى الحصول إما على نتيجة النجاح أو نتيجة الرسوب، ومنه فإن:

$$\boldsymbol{p} = {}^{25}/_{35} = \boldsymbol{{}^{5}/_{7}} \quad , \quad \boldsymbol{q} = {}^{10}/_{35} = \boldsymbol{{}^{2}/_{7}} \quad , \quad X \backsim G\left({}^{5}/_{7}\right)$$

$$P(X = 20) = \left(\boldsymbol{{}^{5}/_{7}}\right)\left(\boldsymbol{{}^{2}/_{7}}\right)^{\boldsymbol{19}} = 3{,}285 \;.10^{-11}$$

- **التوزيع فوق الهندسي (Hyper geometric Distribution):**

المحاضرة 4: تابع لأهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

يستخدم هذا التوزيع في التجارب غير المستقلة والتي يكون فيها سحب العينات بدون إرجاع (بدون تكرار)، وهو عكس توزيع ذي الحدين (التوزيع الثنائي) أين تكون التجارب مستقلة وسحب العينات بالارجاع (مع التكرار).

وتعطى دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع X الذي يمثل عدد حالات النجاح التي يمكن الحصول عليها من تجربة التوزيع فوق الهندسي بالصيغة التالي:

$$\boldsymbol{P(X=x)=\frac{C_{N_1}^{x}.\,C_{N-N_1}^{n-x}}{C_N^n}}$$

اختصارا تكتب دالة التوزيع بـ: $\boldsymbol{X \backsim H(N_1,\ N-N_1\ ,\ p)}$، وهذا يعني أن المتغير العشوائي X يتبع التوزيع فوق الهندسي بالمعلمتين $\boldsymbol{N_1}$ و $\boldsymbol{N-N_1}$.

حيث:

$\boldsymbol{N}$:مجتمع من العناصر فيه عناصر تمثل النجاح وأخرى تمثل الفشل.

$\boldsymbol{N_1}$: العناصر التي تمثل النجاح.

$\boldsymbol{(N-N_1)}$: العناصر المتبقية والتي تمثل الفشل.

$\boldsymbol{n}$: عينة عشوائية مختارة بدون ارجاع.

ويعطى التوقع (المتوسط الحسابي) والتباين لهذا التوزيع بالصيغتين التاليتين:

$$\boldsymbol{E(X)}=n.\frac{N_1}{N}=\boldsymbol{n.p}$$

$$\boldsymbol{V(X)}=n.\frac{N_1}{N}\left[1-\frac{N_1}{N}\right]\left[\frac{N-n}{N-1}\right]=\boldsymbol{n.p.q}\left[\frac{\boldsymbol{N-n}}{\boldsymbol{N-1}}\right]$$

مثال:

صندوق به 7 كريات، 4 بيضاء و3 سوداء، تم سحب كرتين (2) من هذا الصندوق بطريقة عشوائية وبدون ارجاع، المطلوب حساب الاحتمالات التالية:

- الحصول على 0 كرية بيضاء.
- الحصول على 2 كرية بيضاء.

الحل:

بما أنّ العينة المسحوبة عشوائية وبدون ارجاع، فإن التوزيع المناسب هو التوزيع فوق الهندسي.

$X \sim H(N_1;\ N-N_1) = (4;\ 3)$ n=2 N=7

- الحصول على 0 كرية بيضاء:

$$P(X=0) = \frac{C_4^0 . C_3^2}{C_7^2}$$

- الحصول على 2 كرية بيضاء:

$$P(X=2) = \frac{C_4^2 . C_3^0}{C_7^2}$$