



Chapitre 2

Logique des prédicats



Introduction

Si on prend le fameux syllogisme :

Tout homme est mortel
Socrate est un homme
Alors Socrate est mortel

Avec la logique propositionnelle, on ne peut pas exprimer ce syllogisme avec précision.

Le langage des prédicats a les éléments et les outils qui nous permettent de représenter ce genre d'énoncés.

Langage des prédicats

1. L'alphabet :

- Les connecteurs logiques : \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow
- Les quantificateurs : \forall , \exists
- Les variables : x , y , ...
- Les constantes : a , b , ...
- Les symboles de prédicats : P , Q , ...
- Les symboles de fonctions : f , g , ...

2. Les fonctions

C'est une généralisation des fonctions numériques sur n'importe quel domaine D (personnes, villes, ...).

Exemples :

- $D = \mathbb{R}$: $f(x) = x^2$
- $D =$ l'ensemble des humains : $g(x) = \text{père}(x)$
- $D = \mathbb{N}$: $h(x,y) = \text{PGCD}(x,y)$

Le résultat de la fonction est un élément du même domaine

3. Les prédicats

C'est une propriété d'un élément du domaine ou une relation entre les éléments du domaine.

Exemples :

- $P(x)$: x est un nombre premier
- $Q(x,y)$: $x > y$

La valeur du prédicat est booléenne V ou F.

4. Les quantificateurs

- Le quantificateur universel \forall (quelque soit)
- Le quantificateur existentiel \exists (il existe au moins)

Exemple :

Si on a : $P(x)$: x est présent , $A(x)$: x est absent

$\forall x P(x)$: Tout les étudiants sont présents

$\exists x A(x)$: Il existe des étudiants absents

5. Les termes

- Toute constante est un terme
- Toute variable est un terme
- Si t_1, \dots, t_n sont des termes et f est une fonction alors : $f(t_1, \dots, t_n)$ est un terme.

6. Les formules

- Si t_1, \dots, t_n sont des termes et P est un prédicat alors : $P(t_1, \dots, t_n)$ est une formule.
- Si x est une variable et α, β deux formules alors : $\neg\alpha, \alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta, \alpha \rightarrow \beta, \alpha \leftrightarrow \beta, \forall x \alpha, \exists x \alpha$ sont des formules.

Exemples de formules

$\forall x P(x) \wedge \exists y Q(y) \rightarrow P(x)$, $\forall x \forall y \exists z (P(x,y) \rightarrow Q(x,y,z))$

Priorité des connecteurs + quantificateurs :

$$\neg, \wedge, \vee, (\exists, \forall), \rightarrow, \leftrightarrow$$

Système complet

Même définition dans le chapitre 1, sauf qu'on ajoute les quantificateurs à l'ensemble des connecteurs

Exemple : $S = \{\neg, \rightarrow, \forall\}$

On a déjà montré que $\{\neg, \rightarrow\}$ est un système complet il reste à trouver la relation entre \exists et \forall . on a les propriétés suivantes:

$$\neg \exists x \alpha = \forall x \neg \alpha \quad \text{et} \quad \neg \forall x \alpha = \exists x \neg \alpha$$

Le champ d'un quantificateur

Le champ d'un quantificateur dans une formule est la sous formule concernée par ce quantificateur

Exemple : $\forall x P(x) \wedge \exists y Q(y) \rightarrow P(x)$

- Le champ de \exists est $Q(y)$
- Le champ de \forall est $P(x) \wedge \exists y Q(y)$

Les variables libres et les variables liées

- ◆ Une occurrence de x dans une formule α est liée si elle apparaît dans le champ d'un quantificateur, sinon elle est libre
- ◆ Une variable est liée si elle a au moins une occurrence liée
- ◆ Une variable est libre si elle a au moins une occurrence libre

Exemple :

- ◆ $P(x) \rightarrow Q(y,z)$ toutes les variables sont libres
- ◆ $\forall x P(x) \wedge Q(y)$ x est liée et y est libre

La formule close

C'est la formule dont toutes les variables sont liées et non libres

Exemple : $\forall x \forall y \exists z (P(x,y) \rightarrow Q(x,y,z))$

L'interprétation

Pour donner une valeur de vérité à une formule, il faut donner une signification à tous les symboles de la formule (prédicats, fonctions, constantes) ainsi que le domaine des variables.

Exemple 1 : $\alpha = \forall x \exists y P(x,y)$, $D = \mathbb{N}$

- Si P signifie < alors α est vraie
- Si P signifie > alors α est fausse

L'évaluation

L'évaluation d'une formule consiste à donner une valeur pour chaque variable libre de la formule.

L'attribution d'une valeur de vérité à une formule, nécessite une interprétation et une évaluation de la formule.

Exemple : $\beta = P(x, f(x))$

Soit l'interprétation I tel que I(P) : « = » et I(f) : carré de ...

- Si $x = 2$ alors β est fausse
- Si $x = 1$ alors β est vraie

Satisfiabilité

Une formule α est satisfiable s'il existe une interprétation I et une évaluation v , pour lesquelles α est vraie. On dit que l'évaluation v satisfait α pour l'interprétation I. et on écrit $I \models_{\alpha v}$.

Exemple : $\alpha = P(f(x,y), y)$, tel que :

$D = \mathbb{N}$, I(P) = ">" , I(f) = "-" , $v(x) = 4$, $v(y) = 1$

$$\begin{aligned} I(\alpha)_v &= I(P(f(x,y), y)) \\ &= I(P) (I(f(x,y), v(y))) \\ &= I(P) (I(f) (v(x), v(y)), v(y)) \\ &= > (-4, 1), 1 = > (3, 1) \end{aligned}$$

Un ensemble de formules Γ est satisfiable s'il existe une interprétation I et une évaluation v , pour lesquelles les formules de Γ sont toutes vraies.

Modèle d'une formule

On dit que l'interprétation I est un modèle de la formule α , si toute évaluation satisfait α pour l'interprétation I . On note $I \models \alpha$

Exemple 1 : $I(P) = ">"$, $I(f) = \text{"le double de ..."} , D = \mathbb{N}^*$

I est un modèle de $P(f(x), x)$

Exemple 2 : $\alpha = P(x, y)$, $I(P) = \text{"... diviseur de..."}$, $D = \{1, 2\}$

	V ₁	V ₂	V ₃	V ₄
x	1	1	2	2
y	1	2	1	2
α	V	V	F	V

On dit que α est satisfiable mais I n'est pas modèle de α

Exemple 3 : $D = \{2, 6\}$, $I(P) = \text{"... diviseur de..."}$, $I(Q) = \text{"... multiple de ..."}$

$\alpha = \forall x P(x, y)$, $\beta = \forall x \exists y Q(x, y)$

	V ₁	V ₂	V ₃	V ₄
x	2	2	6	6
y	2	6	2	6
$P(x, y)$	V	V	F	V
$Q(x, y)$	V	F	V	V

$I \not\models \alpha$ $I \models \beta$.

On dit que l'interprétation I est un modèle de l'ensemble Γ , si toute évaluation satisfait Γ pour l'interprétation I . On note $I \models \Gamma$

Validité d'une formule

Une formule α est valide si elle est vraie pour toute interprétation I , et toute évaluation v . On note $\models \alpha$.

Exemple : $\beta = \neg P(x) \vee P(x)$

Pour démontrer qu'une formule n'est pas valide, il suffit de trouver une interprétation et/ou une évaluation pour lesquelles la formule est fausse.

Conséquence logique

On dit que β est conséquence logique de Γ (on note $\Gamma \models \beta$), ssi pour toute interprétation I et toute évaluation v , on a :

$$\text{Si } I \models \Gamma_v \text{ alors } I \models \beta_v$$

Exemple : $\forall x (\alpha \rightarrow \beta), \forall x \alpha \models \forall x \beta$

Formes normales

1- Forme normale prénexe

On dit que α est sous la forme prénexe si :

- α est de la forme : $Q_1x_1 \dots Q_nx_n \beta$ telque : $Q_i \in \{\forall, \exists\}$
- Le champ de Q_nx_n est β
- β ne contient pas des quantificateurs.

Pour transformer les formules en forme normale prénexe, on se base sur les propriétés suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} \forall x \alpha \rightarrow \beta \equiv \exists x (\alpha \rightarrow \beta) \\ \exists x \alpha \rightarrow \beta \equiv \forall x (\alpha \rightarrow \beta) \end{array} \right\} \text{ Sous condition : } x \text{ n'apparaît pas libre dans } \beta$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \rightarrow \forall x \beta \equiv \forall x (\alpha \rightarrow \beta) \\ \alpha \rightarrow \exists x \beta \equiv \exists x (\alpha \rightarrow \beta) \end{array} \right\} \text{ Sous condition : } x \text{ n'apparaît pas libre dans } \alpha$$

Exemple : $\exists x P(x) \rightarrow \exists y P(y) \dots (1)$

x n'apparaît pas libre dans $\exists y P(y)$

$$(1) \equiv \forall x (P(x) \rightarrow \exists y P(y))$$

y n'apparaît pas libre dans $P(x)$

$$(1) \equiv \forall x \exists y (P(x) \rightarrow P(y))$$

Remarque : Si les conditions posées pour les propriétés ne sont pas satisfaites, on procède à des modifications selon les règles suivantes :

- $\forall x \beta \equiv \forall y \beta_{(y/x)}$
 - $\exists x \beta \equiv \exists y \beta_{(y/x)}$
- } On obtient $\beta_{(y/x)}$ par remplacement de x par y

Exemple : Transformer en forme normale prénexe :

$$\begin{aligned} & \exists x P(x,y) \rightarrow \exists y Q(y,x) \\ & \quad \blacklozenge \text{ x apparait libre dans « } \exists y Q(y,x) \text{ », on change la variable} \\ \equiv & \exists u P(u,y) \rightarrow \exists y Q(y,x) \\ & \quad \blacklozenge \text{ u n'apparait pas libre dans « } \exists y Q(y,x) \text{ »} \\ \equiv & \forall u (P(u,y) \rightarrow \exists y Q(y,x)) \\ & \quad \blacklozenge \text{ y apparait libre dans « } P(u,y) \text{ », on change la variable} \\ \equiv & \forall u (P(u,y) \rightarrow \exists v Q(v,x)) \\ & \quad \blacklozenge \text{ u n'apparait pas libre dans « } P(u,y) \text{ »} \\ \equiv & \forall u \exists v (P(u,y) \rightarrow Q(v,x)) \end{aligned}$$

2- Forme normale de Skolem

Elle consiste à éliminer tous les quantificateurs existentiels en utilisant de nouveaux symboles de fonction ou des constantes tout en conservant la satisfiabilité de la formule.

Etant donné : $\alpha = \forall x \exists y P(x,y)$ cette formule veut dire que pour chaque x il existe un y qui vérifie $P(x,y)$, c-a-d, on peut définir une fonction $f(x)$ qui remplacera y dans la formule.

La forme de skolem de α est donc : $\alpha_s = \forall x P(x,f(x))$

$$\begin{aligned} \text{Exemple 1 : } \beta &= \forall x_1 \forall x_2 \exists y P(x_1, x_2, y) \\ \beta_s &= \forall x_1 \forall x_2 P(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \end{aligned}$$

Pour une formule de la forme $\exists x \beta$, on élimine le quantificateur et on remplace x par une nouvelle constante.

$$\text{Exemple 2 : } \alpha = \exists x P(x) \Rightarrow \alpha_s = P(a)$$

Remarques :

- la skolémisation d'une formule suppose qu'elle est sous la forme prénexe.
- La skolémisation d'une formule ne donne pas une formule équivalente.

$$\begin{aligned} \text{Exemple 3 : } \alpha &= \exists x \forall y \forall z \exists v P(x,y,z,v) \\ \alpha_s &= \forall y \forall z p(a,y,z,f(y,z)) \end{aligned}$$