Chapitre 1

Logique propositionnelle

<u>La proposition (assertion)</u>

C’est une phrase informative qu’on peut juger vraie ou fausse

<u>Exemple</u> :

1. La terre est sphérique … Vrai
2. Le soleil tourne autour de la terre … Faux

On dit que la <u>valeur de vérité</u> de la première phrase = Vrai

La proposition peut être affirmative ou négative

<u>Exemple</u> :

7. La phrase 1 est affirmative
8. Sa forme négative : la terre n’est pas sphérique

La proposition peut être composée. Dans ce cas sa valeur de vérité dépend des valeurs de vérité des propositions qui la composent :

« La terre est sphérique et tourne autour du soleil »

Cette proposition est vraie car elle est la conjonction de deux propositions vraies

Il y a des phrases qui ne sont pas informatives :

9. Quel âge avez-vous ?
10. Rangez vos affaires.

Ces phrases bien évidement ne sont pas considérées comme propositions car on ne peut pas dire vrai ou faux

<u>Le paradoxe</u>

C’est une phrase informative Mais elle n’est ni vraie ni fausse

<u>Exemple</u> : « je ment »

Langage propositionnel

Il est composé de :

1- L'Alphabet

11. Les propositions P, Q, R, …
12. Les connecteurs logiques : $\rceil$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
13. Les parenthèses

symbole	Appellation	Prononciation
$\rceil$	Négation	Non P
$\wedge$	Conjonction	P et Q
$\vee$	Disjonction	P ou Q
$\rightarrow$	Implication	P implique Q
$\leftrightarrow$	Equivalence	P est équivalent à Q P si et seulement si Q

2- La syntaxe

Une formule est une composition de propositions à l'aide de connecteurs logiques. On note α , β , …

La composition se fait en respectant les règles suivantes :

14. Toute proposition est une formule
15. Si α est une formule alors $\rceil\alpha$ est aussi une formule
16. Si α est β sont deux formules alors α o β est aussi une formule,

    tel que o $\in$ { $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ }
17. Si α est une formule alors (α) est aussi une formule

Exemple

P , Q , $\rceil P$, $\rceil\rceil Q$, $\rceil P \vee \rceil Q$, $\rceil Q \rightarrow P \vee \rceil R$: des formules bien formées

$(PQ\vee)$, $(P1 \rightarrow (P2 \rceil P3))$: formules mal formées

Priorité des connecteurs

La connaissance des priorités permet la bonne lecture de la formule et évite les parenthèses supplémentaires.

- La priorité des connecteurs de la plus forte à la plus faible: $\urcorner$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
- Lorsque le même connecteur se répète dans la même formule, la priorité est donné à celui le plus à gauche.
- Lorsqu'un connecteur est mis entre parenthèse alors il est prioritaire

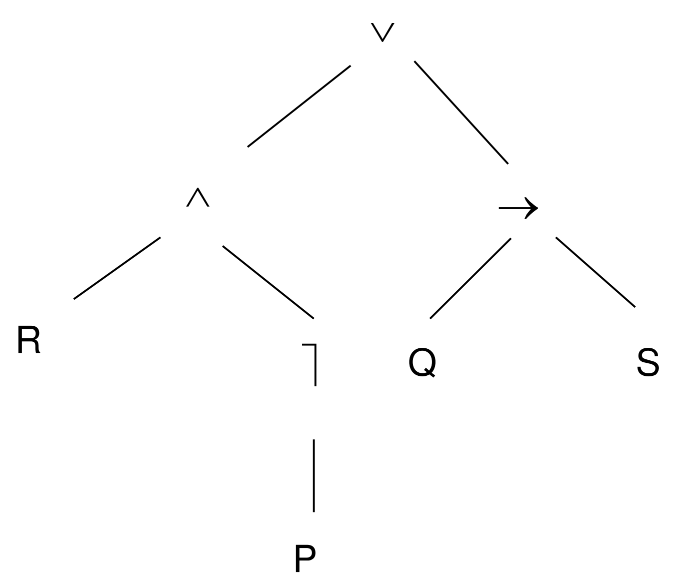
Exemples :

1. $P \wedge \urcorner Q$	1. Négation, 2.Conjonction
2. $\urcorner P \rightarrow Q \wedge R$	1. Négation, 2.Conjonction, 3. Implication
3. $(P \vee Q) \wedge R$	1. Disjonction, 2. Conjonction
4. $P \rightarrow Q \rightarrow R$	1. Première implication 2. Deuxième implication

Structure d'une formule

On peut représenter une formule sous forme d'un arbre. Cela permet de bien lire la formule.

Exemple : $R \wedge \urcorner P \vee (Q \rightarrow S)$



3- Sémantique

la sémantique du langage propositionnelle s'intéresse à donner une valeur de vérité à chaque formule du langage.

On peut définir une fonction v : EF $\rightarrow$ { V , F } ;

Tel que EF: ensemble des formules.

Les valeurs de vérité des formules de base sont montrées dans les tableaux suivant , on les nomme les tables de vérité :

P	**Q**	**$P \wedge Q$**	**$P \vee Q$**	**$P \rightarrow Q$**	**$P \leftrightarrow Q$**
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

P	**$\rceil P$**
V	F
F	V

Supposons que α est une formule qui contient n propositions, la table de vérité correspondante va contenir 2^n lignes .

Exemple α : $Q \vee R \rightarrow P$

P	**Q**	**R**	**$Q \vee R$**	**α**
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V
F	F	F	F	V

Satisfiabilité

Une formule α est satisfiable, ssi, sa table de vérité contient au moins une ligne dont la valeur de vérité de α est V

Exemple

$R \rightarrow Q \vee P$ est satisfiable

$P \wedge Q \wedge \rceil (P \leftrightarrow Q)$ n'est pas satisfiable

En généralisant, on dit qu'un ensemble de formules $\Gamma = \{\alpha_1 , \alpha_2 , \dots ,\alpha_n\}$ est satisfiable ssi, dans sa table de vérité contient au moins une ligne tel que toutes les valeurs sont vraies.

Exemple : $\{(P \wedge Q),(P \vee Q), (P \rightarrow Q),(P \leftrightarrow Q)\}$ est un ensemble satisfiable (voir le tableau précédant), par contre l'ensemble $\{(P \wedge Q),(P \vee Q), \rceil P\}$ est non satisfiable.

Tautologie

On dit qu'une formule β est une tautologie, si elle est vraie dans toutes les lignes de sa table de vérité. On note $\models \beta$

Exemple : $\beta : P \wedge Q \rightarrow Q$

P	Q	$P \wedge Q$	β
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

On a donc $\models \beta$

Une antilogie est une formule fausse dans toutes les lignes de sa table de vérité

Conséquence logique

On dit que La formule β est une conséquence logique de la formule α (on note $\alpha \models \beta$) si la valeur de vérité de β est V dans toutes les lignes où la valeur de vérité de α est V.

En généralisant, on dit que La formule β est une conséquence logique de l'Ensemble de formules $\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ (on note $\Gamma \models \beta$) si la valeur de vérité de β est V dans toutes les lignes où les valeurs de vérité des formules de Γ sont toutes vraies.

Exemples :

$P \vee Q \models P \to Q$

$\{P \to Q, \neg Q\} \models \neg P$

P	**Q**	**$P \to Q$**	**$\neg Q$**	**$\neg P$**
V	V	V	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Remarque : Toutes les formules sont conséquences logiques de tout ensemble de formules non satisfiable.

Equivalence logique

On dit que α et β sont logiquement équivalentes si elles ont la même table de vérité (on note : $\alpha \equiv \beta$)

Exemple : $P \to Q \equiv \neg P \vee Q$

Théorème 1

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \beta \text{ si et seulement si } \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \models \alpha_n \rightarrow \beta$$

Démonstration des deux implications avec la contraposée

1) Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \beta$ alors $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \models \alpha_n \rightarrow \beta$

On suppose que la partie droite est fausse, donc $\alpha_n \rightarrow \beta$ n'est pas conséquence logique de $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, cela veut dire qu'il existe une ligne dans la table de vérité où $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ sont toutes V, avec $\alpha_n \rightarrow \beta$ est F, c-à-d la valeur de β est F alors que α_n est V. On conclut qu'il y a une ligne dans laquelle $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ valent V et β vaut F, donc la partie gauche est fausse.

2) Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \models \alpha_n \rightarrow \beta$ alors $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \beta$

On suppose que la partie droite est fausse, donc β n'est pas conséquence logique de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, cela veut dire qu'il existe une ligne dans la table de vérité où tous les α_i sont V, avec β est F. Donc pour cette ligne, on a $\alpha_n \rightarrow \beta$ est V. On conclut qu'il y a une ligne dans laquelle $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ valent V et $\alpha_n \rightarrow \beta$ vaut F, donc la partie gauche est fausse.

Théorème 2

$$\beta \models \Gamma \quad \text{alors } \beta \models \alpha \rightarrow \alpha \quad \text{et} \quad \Gamma \text{ Si } \Gamma \models$$

Démonstration (contraposée)

Supposons que $\Gamma \models \beta$ est fausse alors il existe une ligne dans la table de vérité de Γ, α et β dans laquelle β est fausse et toutes les formules de Γ sont vraies. Dans la même ligne on a deux possibilités pour α.

1- α = V alors $\alpha \rightarrow \beta$ = F, d'où $\Gamma \models \alpha \rightarrow \beta$ est fausse

2- α = F alors $\Gamma \models \alpha$ est fausse

Dans les deux cas, la partie droite (conjonction) est fausse

Théorème 3

$$\text{Si} \quad \Gamma \models \beta \quad \text{et} \quad \Gamma \models \neg\beta \quad \text{alors} \quad \Gamma \quad \text{est non satisfiable}$$

Théorème 4

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \beta \quad \text{ssi} \quad \{\alpha 1, \ldots, \alpha n, \neg\beta\} \text{ est non satisfiable}$$

Théorème 5 (théorème de substitution)

Soit β une formule contenant la proposition P et β' la formule qui résulte de β en substituant toutes les occurrences de P par α, on a donc :

$$\text{Si} \models \beta \text{ alors } \models \beta'$$

Exemple : $\beta : P \rightarrow (Q \rightarrow R \rightarrow P)$, $\beta' : A \wedge B \rightarrow (Q \rightarrow R \rightarrow A \wedge B)$

On peut facilement vérifier que β et β' sont des tautologies

Théorème 6 (théorème de remplacement)

Soit α une formule contenant plusieurs occurrences d'une sous-formules β, et α' est la formule résultante de α en remplaçant β par β' dans une ou plusieurs occurrences de β. On a donc :

$$\text{Si} \ \beta \equiv \beta' \ \text{alors} \quad \alpha \equiv \alpha'$$

Exemple :

$\alpha : P \vee (Q \rightarrow R) \leftrightarrow S \vee (Q \rightarrow R)$

$\alpha' : P \vee (\neg Q \vee R) \leftrightarrow S \vee (Q \rightarrow R)$

Selon le théorème on aura : $\alpha \equiv \alpha'$

Equivalences usuelles

$\wedge$, $\vee$: commutatives et associatives

- $\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$
- $\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$
- $\alpha \vee (\beta \vee \alpha) \equiv (\alpha \vee \beta) \vee \alpha$
- $\alpha \wedge (\beta \wedge \alpha) \equiv (\alpha \wedge \beta) \wedge \alpha$

$\wedge$ est distributive sur $\vee$ et $\vee$ est distributive sur $\wedge$

- $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$
- $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$

Loi de Morgan

- $\rceil(\alpha \vee \beta) \equiv \rceil\alpha \wedge \rceil\beta$
- $\rceil(\alpha \wedge \beta) \equiv \rceil\alpha \vee \rceil\beta$

Idempotence

- $\alpha \vee \alpha \equiv \alpha$
- $\alpha \wedge \alpha \equiv \alpha$

Système complet

Ce tableau regroupe toutes les tables de vérité possibles des fonctions à 2 variables (propositions) :

P	**Q**	**f_1**	**f_2**	**f_3**	**f_4**	**f_5**	**f_6**	**f_7**	**f_8**	**f_9**	**f_{10}**	**f_{11}**	**f_{12}**	**f_{13}**	**f_{14}**	**f_{15}**	**f_{16}**
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	F	F	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F
F	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F

Par exemple, on peut trouver dans ce tableau les formules suivantes :

$f_2\,(P,Q) = P \wedge Q$, $f_5\,(P,Q) = P \rightarrow Q$, $f_{13}\,(P,Q) = \rceil P$, …

Définition

Soit S un sous ensemble de connecteurs logiques. On dit que S est un système complet si pour toute formule α, on peut trouver une formule α' ne contenant que les éléments de S, tel que $\alpha \equiv \alpha'$.

Exemple

L'ensemble $\{\rceil, \wedge\}$ est un système complet

Preuve

α	α′
$P \vee Q$	$\rceil(\rceil P \wedge \rceil Q)$
$P \rightarrow Q$	$\rceil(P \wedge \rceil Q)$
$P \leftrightarrow Q$	$\rceil(P \wedge \rceil Q) \wedge \rceil(Q \wedge \rceil P)$

Connecteur de Sheffer

Henry M. Sheffer, a pensé à un connecteur qui forme tout seul un système complet. On cherche dans le tableau précédent la fonction qui peut représenter le connecteur Sheffer.

Par élimination :

5. La valeur de la fonction qui représente le connecteur de Sheffer ne doit pas être V quand les valeurs de P et Q sont toutes les deux V, car si c'était le cas, on ne pourrait jamais arriver à la valeur F, en appliquant plusieurs fois cette fonction. Autrement dit, cette fonction ne représente pas toutes les formules.
6. De la même manière, la valeur de la fonction qui représente le connecteur de Sheffer ne doit pas être F quand les valeurs de P et Q sont toutes les deux F.

En éliminant toutes les fonctions répondant à cette propriété, il nous restent les 4 fonctions : f_9 , f_{11},f_{13}, f_{15} , et comme f_{11} , f_{13} sont exactement $\urcorner Q$ et $\urcorner P$ qui ne peuvent jamais former un système complet puisque le $\urcorner$ s'applique que sur une seule variable, il nous reste donc les deux fonctions f_9 , f_{15} qui peuvent représenter le connecteur de Sheffer. Ce sont exactement le « non et » (NAND) et le « non ou » (NOR).

- Nand : $P \uparrow Q = \urcorner(P \wedge Q)$
- Nor : $P \downarrow Q = \urcorner(P \vee Q)$

Pour montrer que ces deux symboles représentent bien les connecteurs de Sheffer, il suffit de pouvoir écrire tous les autres connecteurs rien qu'avec ces connecteurs ($\uparrow$,$\downarrow$)

1- Le NAND

A	**α′**
$\urcorner P$	$P \uparrow P$
$P \wedge Q$	$(P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q)$
$P \vee Q$	$(P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q)$
$P \rightarrow Q$	……………………….
$P \leftrightarrow Q$	………………………….

2- Le NOR

A	**α′**
$\urcorner P$	$P \uparrow P$
$P \wedge Q$	$(P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q)$
$P \vee Q$	$(P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q)$
$P \rightarrow Q$	……………………….
$P \leftrightarrow Q$	………………………….

Les formes normales

1- La forme normale conjonctive

Une formule α est en forme normale conjonctive, si elle de la forme : $C_1 \wedge \ldots \wedge C_n$, tel que chaque C_i est une clause de la forme $L_1 \vee \ldots \vee L_m$ où chaque L_i est un littéral c-a-d une proposition ou la négation d'une proposition.

Exemple

$(P \vee \neg Q) \wedge (R \vee \neg P \vee Q)$

$P \wedge (\neg Q \vee P)$

Théorème

Pour chaque formule α, il existe une formule α' de la forme normale conjonctive, tel que $\alpha \equiv \alpha'$

2- La forme normale conjonctive

Une formule α est en forme normale disjonctive, si elle de la forme : $M_1 \vee \ldots \vee M_n$, tel que chaque M_i est un monôme de la forme $L_1 \wedge \ldots \wedge L_m$ où chaque L_i est un littéral de la forme P ou $\neg P$.

Exemple

$(\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge R)$

$P \vee (\neg P \wedge Q) \vee R$

Théorème

Pour chaque formule α, il existe une formule α' de la forme normale disjonctive, tel que $\alpha \equiv \alpha'$

Exemple : Transformer la formule $\neg P \rightarrow Q \rightarrow R$ en FND et FNC