توازن المستهلك في نظرية المنفعة الترتيبية

نقول عن مستهلك أنه في حالة توازن إذا حقق أقصى منفعة في ظل دخله المتاح والأسعار السائدة في السوق أي إذا استطاع بلوغ أعلى منحنى سواء ممكن عند استعمال كامل دخله.

1/إيجاد توازن المستهلك رياضيا: لحل اشكالية تعظيم دالة المنفعة أو ما يعرف بالخيار الأمثل للمستهلك نتبع طريقتين:

أ/طريقة التعويض المباشر: بواسطة دالة الدخل: $R = xp_x + yp_y$ يمكن استخراج قيمة y فنحصل على معادلة مستقيم الميزانية من الشكل: $y = \frac{R}{P_y} - \frac{P_x}{P_y}x$ وبتعويض هذه الأخيرة في دالة المنفعة $U = f(x,y)$ نحصل على الدالة من الشكل: $U = f(x, \frac{R - xp_x}{p_y})$، حيث يمكن تعظيمها بدالة هذا المجهول.

وبما أن الميل يمثل المشتقة الأولى لدالة المنفعة فإن شروط الدرجة الأولى(الشرط اللازم) من أجل وجود نقطة أعظمية يجب أن يكون $U' = f'(x) = 0$، ويمكن تحديد اتجاه المنحنى بواسطة المشتق من الدرجة (2) لدالة المنفعة، حيث من أجل تعظيم المنفعة يجب أن يكون $U'' = f''(x) \prec 0$، وعليه يمكن تلخيص شروط تعظيم دالة المنفعة كما يلي:

دالة المنفعة لها قيمة عظمى $\Rightarrow U' = f'(x) = 0, U'' = f''(x) \prec 0$

دالة منفعة لها قيمة صغرى $\Rightarrow U' = f'(x) = 0, U'' = f''(x) \succ 0$

مثال: لتكن دالة المنفعة لمستهلك ما على الشكل التالي: $U = x.y$ و $p_x = 4$، $p_y = 10$، في حين أن دخل المستهلك هو: R=200DA، **المطلوب:** كيف يمكن للمستهلك أن يعظم دالة المنفعة في حدود معطيات السعر والدخل المتاحين؟

الحل: معادلة الدخل: $R = xp_x + yp_y \Rightarrow 200 = 4x + 10y \Rightarrow y = 20 - \frac{2}{5}x$

بتعويض قيمة y في دالة المنفعة الكلية نجد: $U = x(20 - \frac{2}{5}x) = 20x - \frac{2}{5}x^2$

والآن نختبر شروط تعظيم المنفعة:

أ/الشرط اللازم:

$$U' = f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{\delta UT}{\delta x} \Rightarrow f'(x) = 20 - \frac{4}{5}x = 0 \Rightarrow 20 = \frac{4}{5}x \Rightarrow 100 = 4x \Rightarrow \boxed{X = 25}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 10}$$

ب/الشرط الكافي: $U'' = f''(x) \prec 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 UT}{\partial^2 x} = U'' = f''(x) = -\frac{4}{5} \prec 0$

إذن دالة المنفعة لها قيمة عظمى ومن ثم فإن تعظيم المنفعة لهذا المستهلك يتحقق بشراء 25 وحدة من x و10 من y.

ب/طريقة مضاعف لاغرانج "**la méthode de Lagrange**": يمكن الوصول إلى التوازن الأمثل للمستهلك باستخدام مضاعف أو مضروب لاغرانج، وذلك بإضافة قيد الميزانية إلى دالة المنفعة الكلية لكن هذه الإضافة لاتعد خطئا من الناحية الجبرية لأن ما بين قوسين يساوي الصفر، وكل ما في الأمر أن عدد المتغيرات يصبح 3 بدلا من 2 ويمكن توضيح ذلك كالآلي: لدينا دالة المنفعة: $U = f(x,y)$ ومعادلة الدخل $R = xp_x + yp_y$ نجعل هذه المعادلة جبرية $R - xp_x - yp_y = 0 \Rightarrow \lambda(R - xp_x - yp_y) = 0$ حيث: $(\lambda = lambda)$

تشكيل دالة لاغرانج: $L = f(x,y) + \lambda(R - xp_x + yp_y)$

إن تعظيم دالة المنفعة الكلية يعني في نفس الوقت تعظيم دالة لاغرانج ولتحقيق ذلك لابد من توفر شرطين هما:

أ/الشرط الازم: يتمثل في انعدام المشتقات الجزئية الأولى بالنسبة لـ x, y, λ :

$$\frac{\delta L}{\delta x} = 0 \Rightarrow f'_x - \lambda p_x = 0 \Rightarrow \frac{\delta UT}{\delta x} = \lambda p_x \ldots\ldots\ldots \boxed{1}$$

$$\frac{\delta L}{\delta y} = 0 \Rightarrow f'_y - \lambda p_y = 0 \Rightarrow \frac{\delta UT}{\delta y} = \lambda p_y \ldots\ldots\ldots \boxed{2}$$

$$\frac{\delta L}{\delta \lambda} = 0 \Rightarrow R - xp_x - yp_y = 0 \Rightarrow R = xp_x + yp_y \ldots\ldots\ldots \boxed{3}$$

من المعادلة 1 والمعادلة 2 نجد:

شرط تعظيم المنفعة $\longleftarrow$ $\lambda = \dfrac{\dfrac{\delta U}{\delta x}}{P_x} + \dfrac{\dfrac{\delta U}{\delta y}}{P_y} \Rightarrow \lambda = \dfrac{Um_x}{p_x} = \dfrac{Um_y}{p_y}$

حيث λ مضاعف لاغرانج ويمثل اقتصاديا المنفعة الحدية للنقود أي عدد الوحدات من المنفعة التي يحققها أخر دينار أنفق على السلعة.

ب/الشرط الكافي: أن يكون المحدد الهيسي >0 أي: $|\Delta| \succ 0$

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{x\lambda} \\ L_{yx} & L_{yy} & L_{y\lambda} \\ L_{\lambda x} & L_{\lambda y} & L_{\lambda\lambda} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} & -p_x \\ L''_{yx} & L''_{yy} & -p_y \\ L''_{\lambda x} & L''_{\lambda y} & 0 \end{vmatrix}$$

حيث: $L''_{xx} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2}, L''_{yy} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2}, L''_{xy} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial^2 x \partial^2 y}$

مثال: نأخذ معطيات المثال السابق، أحسب كمية السلع التي تمكن المستهلك من تعظيم منفعته باستخدام طريقة لاغرانج:

$$\begin{cases} U = f(x,y) = x.y \\ s/c\ 200 = 4x + 10y \end{cases}$$

لدينا:

تشكيل دالة لاغرانج كما يلي: $L = x.y + \lambda(200 - 4x + 10y)$

1/الشرط الازم: انعدام المشتقات الجزئية الأولى بالنسبة لـ x, y, λ

$$\frac{\delta L}{\delta x} = 0 \Rightarrow y - 4\lambda = 0 \Rightarrow y = 4\lambda \ldots\ldots\ldots \boxed{1}$$

$$\frac{\delta L}{\delta y} = 0 \Rightarrow x - 10\lambda = 0 \Rightarrow x = 10\lambda \ldots\ldots\ldots \boxed{2}$$

$$\frac{\delta L}{\delta \lambda} = 0 \Rightarrow 200 - 4x - 10y = 0 \Rightarrow 200 = 4x + 10y \ldots\ldots \boxed{3}$$

*بقسمة المعادلة 1 على المعادلة 2 نجد:

$$\frac{y}{x} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \Rightarrow \boxed{y = \frac{2}{5}x}$$

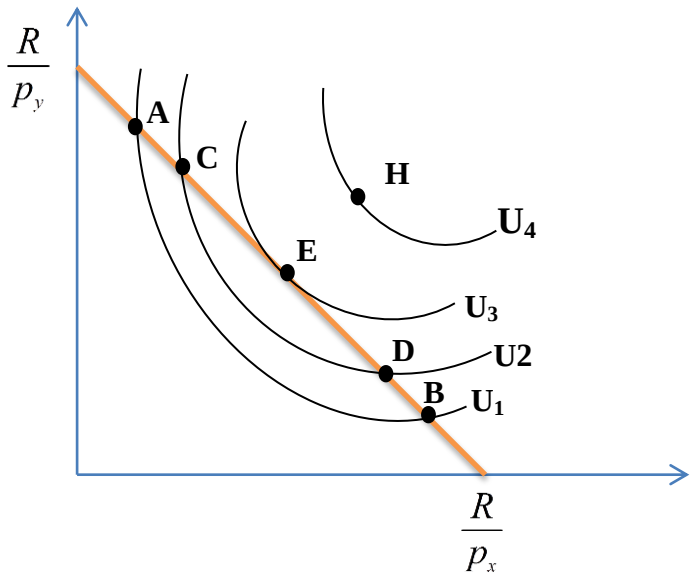
بتعويض قيمة y في المعادلة 3 نجد:

$$200 = 4x + 10(\frac{2}{5}x) \Rightarrow 200 = 4x + 4x \Rightarrow \boxed{X=25} \Rightarrow \boxed{y=10}$$

ب/الشرط الكافي: أن يكون المحدد الهيسي>0 أي: $|\Delta| \succ 0$

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -10 \\ -4 & -10 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -4 & -10 \end{matrix} = (0+40+40) - (0+0+0) = 80$$

ب/ايجاد توازن المستهلك هندسيا: حتى يمكن الوصول إلى نقطة توازن المستهلك حسب نظرية منحنيات السواء ينبغي الجمع في نفس المعلم بين منحنيات السواء وخط الميزانية وحينها نجد أن نقطة التوازن تتحقق عندما يمس خط الميزانية أعلى منحنى سواء ممكن وذلك كما هو موضح في الشكل:



واضح من خريطة السواء أن المستهلك لا يستطيع اختيار أي توليفة سلعية على منحنى سواء يقع أعلى خط الميزانية مثل منحنى السواء u4 بسبب عدم كفاية الدخل المتاح، لكن يستطيع اختيار أي مجموعة سلعية على منحنيات السواء u_1، u_2، u_3، وفي نفس الوقت تقع على نفس خط الميزانية، إذا أختار المستهلك التوليفة A أو B، فبالرغم من وجودها على خط الميزانية، إلا أن وقوعها على خط منحنى السواء u_1 يحقق مستوى اشباع أقل من u_2، u_3، وكذلك إذا اختار التوليفة C، D، على u_2، سوف يحقق إشباعا أقل من الإشباع الذي تحققه E، الواقعة على منحنى السواء u_3، وعليه يمكن القول أن E تمثل نقطة توازن المستهلك حيث عند هذه النقطة يمس خط الميزانية أعلى خط سواء ممكن وبالتالي تحقيق أكبر اشباع ممكن.

شرط التوازن: نلاحظ من الشكل أعلاه أن خط الميزانية يمس منحنى السواء u_3 في النقطة E ويعني ذلك أن: **ميل منحنى السواء (المعدل الحدي للإحلال)= ميل خط الميزانية.**

حيث:

ميل منحنى السواء(له ميل سالب): $-\frac{dy}{dx}$

ميل خط الميزانية:(النسبة بين الأسعار): $\frac{dy}{dx}=-\frac{p_x}{p_y}$

إذن: $-\frac{p_x}{p_y}=\frac{dy}{dx}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\frac{Um_x}{Um_y}=\frac{p_x}{p_y}=-\frac{dy}{dx}=TMS$$

مثال: تمثل البيانات التالية مختلف التوليفات السلعية لـ x و y، حسب تفضيلات المستهلك بحيث مستوى الإشباع I < II وبافتراض أن: p_x=400 و p_y=200 و R=3800 DA.

مستوى الإشباع I			مستوى الإشباع II		
Q_x	Q_y	TMS	Q_x	Q_y	TMS
1	19	-	2	20	-
2	16	3	3	17	3
3	13	2	4	15	2
4	12	1	5	14	1
6	11	1/2	7	13	½
9	10	1/3	10	12	1/3

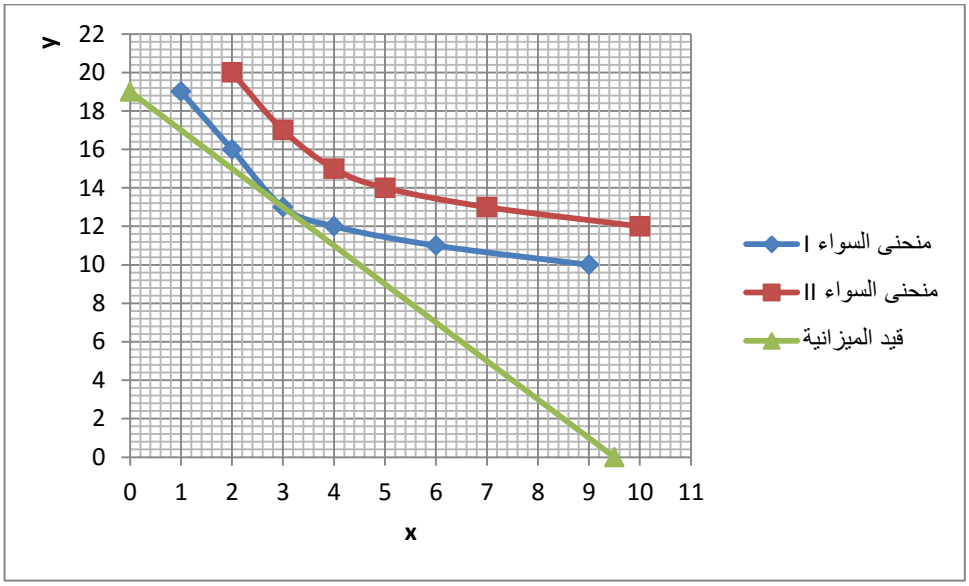
المطلوب: إيجاد التوليفة السلعية التي تحقق توازن المستهلك.

الحل:

حساب معادلة قيد الميزانية: $y=\frac{3800}{200}-\frac{400}{200}x \Rightarrow y=19-2x$

النقاط المتطرفة هي:

x	0	9,5
y	19	0



التوليفة التي تحقق توازن المستهلك هي التي تستجيب للشرط : $\frac{Um_x}{Um_y}=\frac{p_x}{p_y}=-\frac{dy}{dx}=TMS$

لدينا: $\frac{dy}{dx}=\frac{400}{200}=2$ ، ومن ثم فالتوليفة التي تحقق شرط التوازن هي التي يكون عندها المعدل الحدي للإحلال = 2، بالرجوع إلى الجدول نجد أنه بالنسبة إلى مستوى الإشباع الأول (منحنى السواء **I**) التوليفة المثلى هي: $(x,y)^*(3,13)$ ، وللتأكد $R=4.400+13.200=3800AD$ ، أما بالنسبة لمستوى الإشباع الثاني التوليفة المثلي هي: $(x,y)^*(4,15)$ لا كنها لا تستجب لقيد الدخل حيث:

$$4.400+15.200 \Rightarrow 1600+3000=4600 \succ R$$

وعليه فإن التوليفة التي تحقق قيد الميزانية وشرط التوازن هي $(x,y)^*(3,13)$.