المحور الثالث:

الفائدة المركبة

- تعريف الفائدة المركبة:

الفائدة المركبة هي تلك الفائدة التي تُحسب على أساس أصل المبلغ مضاف إليه الفوائد المتولدة عن الفترات السابقة، وهي بهذا تختلف عن الفائدة البسيطة كون هذه الأخيرة تُحسب فقط على أساس أصل المبلغ مهما كان عدد الوحدات الزمنية.

وتُستعمل في الغالب الفائدة المركبة للاقتراض طويل الأجل بينما تُحسب الفائدة البسيطة على الاقتراض قصير الأجل.

مثال توضيحي:

تم إيداع مبلغين من المال قدر كل واحد منهما يساوي **1600**وحدة نقدية ولمدة **3** سنوات لكل منهما وأودع كلاهما بمعدل فائدة سنوي **6%** لكن الأول بفائدة بسيطة والثاني بفائدة مركبة.

جدول الفائدة البسيطة:

المدة (السنة)	المبلغ في بداية المدة	الفائدة	المبلغ المتحصل (الجملة)
1	1600	96=0.06*1600	1696=96+1600
2	1600	96=0.06*1600	1696=96+1600
3	1600	96=0.06*1600	1696=96+1600

جدول الفائدة المركبة:

المدة (السنة)	المبلغ في بداية المدة	الفائدة	المبلغ المتحصل (الجملة)
1	1600	96=0.06*1600	1696=96+1600
2	1696	101.76=0.06*1696	1797.76=101.76+1696
3	1797.76	107.87=0.06*1797.76	1905.63=107.87+1797.76

- قانون الفائدة المركبة:

لنفترض أن:

C : أصل المبلغ

i : معدل الفائدة

n : المدة بالسنوات

الفترات	رأس المال في بداية الفترة (1)	فائدة الفترة (2)	القيمة المحصلة في نهاية الفترة (الجملة) (2+1)
1	C	Ci	$C+Ci=C(1+i)$
2	$C(1+i)$	$C(1+i)i$	$C(1+i)+C(1+i)i=C(1+i)[1+i]=C(1+i)^2$
3	$C(1+i)^2$	$C(1+i)^2 i$	$C(1+i)^2+C(1+i)^2 i=C(1+i)^2[1+i]=C(1+i)^3$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
n-1	$C(1+i)^{n-2}$	$C(1+i)^{n-2} i$	$C(1+i)^{n-2}+C(1+i)^{n-2} i=C(1+i)^{n-2}[1+i]=C(1+i)^{n-1}$
n	$C(1+i)^{n-1}$	$C(1+i)^{n-1} i$	$C(1+i)^{n-1}+C(1+i)^{n-1} i=C(1+i)^{n-1}[1+i]=C(1+i)^n$

نستنتج من الجدول أن القيمة المحصلة للمبلغ C بعد عدد من الوحدات الزمنية n بمعدل فائدة مركبة i لكل وحدة زمنية تُعطى بالعلاقة التالية:

$$\boxed{C_n = C(1+i)^n}$$

وهي تمثل القانون الأساسي للفائدة المركبة.

وقانون الفائدة المركبة يُعطي القيمة المحصلة من عملية القرض أو التوظيف (الجملة) بينما قانون الفائدة البسيطة يمدنا بالفائدة مباشرة. ولحساب الفائدة الناتجة عن قانون الفائدة المركبة فإننا نطرح أصل القرض من القيمة المحصلة له. ومنه:

$$I = C_n - C \Rightarrow I = C(1+i)^n - C \Rightarrow \boxed{I = C[(1+i)^n - 1]}$$

- طرق حساب الجملة المركبة:

طريقة الحساب البحت: تقوم هذه على الحساب المباشر. ويُلاحظ أن الحاسبات العلمية تسهل العمليات الحسابية وتختصر الوقت.

طريقة الجداول المالية: إن طريقة الجداول المالية تُعد الأكثر شيوعا واستخداما لما توفره من وقت وتدخره من مجهودات. ولقد أُعد الجدول الأول من هذه الجداول على أساس القيمة المحصلة للوحدة النقدية الواحدة بمعدلات فائدة مركبة متغيرة ولمدد مختلفة لكل معدل منها، فإذا ما قاطعنا بين المعدل المعين والفترة المحددة نحصل على الجملة المركبة التي تنتجها وحدة نقدية واحدة موظفة بذلك المعدل وتلك المدة. ومن البديهي انه لحساب جملة مركبة لمبلغ معين بنفس المعدل ونفس المدة ما علينا إلا أن نضرب الجملة المركبة للوحدة النقدية في ذلك المبلغ.

طريقة اللوغاريتم: يُمكن استخدام هذه الطريقة لحساب الجملة وخاصة إذا كانت الفترة كسرية أو عدم وجودها في الجداول المالية، وكذلك عدم وجود معدل الفائدة في الجداول المالية.

تذكير:

$$\log xy = \log x + \log y$$

$$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$$

$$\log x^{y} = \mathrm{y} \log x$$

مثال:

أودع أحد الأشخاص مبلغ من المال قدره 3500 وحدة نقدية لدى أحد البنوك بمعدل فائدة مركب 6% ولمدة 7 سنوات.

المطلوب:

- أوجد قيكة جملة المبلغ؟

- أوجد قيمة الفائدة المتحصل عليها؟

الحل

C=3500 وحدة نقدية

i=6%

n=7 سنوات

إيجاد جملة المبلغ:

إستخدام الجداول المالية:

$$C_n = C(1+i)^n \Rightarrow C_7 = 3500(1+0.06)^7 = 3500(1.503630259)$$

حيث استخرجنا قيمة $(1.06)^7$ من الجدول المالي رقم 1.

$$\boxed{C_7 = 5262.71 \quad \text{وحدة نقدية}}$$

طريقة اللوغاريتم:

$$C_n = C(1+i)^n \Rightarrow C_7 = 3500(1.06)^7 \Rightarrow LogC_7 = Log3500(1,06)^7$$

$$LogC_7 = Log3500 + Log(1.06)^7 \Rightarrow LogC_7 = Log3500 + 7Log(1.06)$$

$$LogC_7 = 3.544068044 + 7(0.025305865) = 3.721209101$$

$$C_7 = 10^{3.721209101} = \boxed{C_7 = 5262.71 \text{ وحدة نقدية}}$$

حساب الفائدة المتحصل عليها:

يتم حساب قيمة الفائدة سواء من خلال طرح أصل المبلغ من الجملة المركبة المتحصل عليها بإحدى الطرق السابقة أو باستخدام قانون حساب الفائدة الناتجة عن قانون الفائدة المركبة. ومنه:

$$I = C_n - C \Rightarrow I = C_7 - C \Rightarrow I = 5262.71 - 3500 = \boxed{1762.71 \text{ وحدة نقدية}}$$

أو:

$$I = C[(1+i)^n - 1] = 3500[(1+0.06)^7 - 1]$$

$$I = 3500[(1.06)^7 - 1] = 3500[1.50363026 - 1] = \boxed{1762.71 \text{ وحدة نقدية}}$$

- إيجاد الجملة المركبة في حالة المدة غير الكاملة (تحتوي شهور و/ أو أيام):

عندما تحتوي المدة أجزاء من السنة (شهور و / أو أيام)، فإن هناك عدة طرق تساعدنا على إيجاد الجملة المركبة، نذكر منها اثنتان:

الطريقة الرياضية: وتعتمد على مبادئ الرياضيات المالية وتتمثل في استعمال الجدول المالي رقم **1** لحساب $(1+i)^n$ للسنوات الكاملة بينما تُستعمل الجداول الملحقة المخصصة للشهور أو الأيام للمدة الباقية المرافقة لعدد السنوات الكاملة. ونجد الجملة كما يلي:

$$C_{n+\frac{m}{12}} = C(1+i)^{n+\frac{m}{12}} \Rightarrow \boxed{C_{n+\frac{m}{12}} = C(1+i)^n(1+i)^{\frac{m}{12}}}$$

وفي حالة الأيام نستبدل $\frac{m}{12}$ بـ $\frac{j}{360}$

الطريقة البنكية: حسب هذه الطريقة المستعملة في البنوك عمليا، يتم حساب قيمة الفائدة للفترات أو السنوات الكاملة بعلاقة جملة الفائدة المركبة، أما ما يتعلق بالأيام أو الشهور فتُستعمل علاقة الفائدة البسيطة.

$$\boxed{C_{n+\frac{m}{12}} = C(1+i)^n + C(1+i)^n i\,\frac{m}{12}}$$

وفي حالة الأيام نستبدل $\frac{m}{12}$ بـ $\frac{j}{360}$

مثال:

أودع احد الأشخاص مبلغ من المال قدره 3200 وحدة نقدية لدى احد البنوك بمعدل فائدة مركب 7.5% لمدة 3 سنوات و5 أشهر.

المطلوب: احسب الجملة بالطريقة الرياضية وبالطريقة البنكية؟

الحل

$C = 3200$

$i = 7.5\%$

n= 3, m= 5

الطريقة الرياضية:

$$C_{n+\frac{m}{12}} = C(1+i)^n(1+i)^{\frac{m}{12}} = 3200(1.075)^3(1.075)^{\frac{5}{12}}$$

من الجدول المالي رقم 1 نستخرج قيمة $(1.075)^3$ ومن الجدول المالي رقم 6 نستخرج قيمة $(1.075)^{\frac{5}{12}}$ ومنه:

$$C_{3+\frac{5}{12}} = 3200(1{,}242296875)(1{,}030592221) = \boxed{\mathbf{4096{,}96} \text{ وحدة نقدية}}$$

الطريقة البنكية:

$$C_{n+\frac{m}{12}} = C(1+i)^n + C(1+i)^n i\frac{m}{12} \Rightarrow C_{3+\frac{5}{12}} = 3200(1{,}075)^3 + 3200(1{,}075)^3\frac{7{,}5}{100}\frac{5}{12}$$

من الجدول المالي رقم 1 نستخرج قيمة $(1.075)^3$. ومنه:

$$C_{3+\frac{5}{12}} = 3200(1.242296875) + 3200(1.242296875) \times \frac{7.5}{100} \times \frac{5}{12} = \boxed{\mathbf{4099.58} \text{ وحدة نقدية}}$$

ويُلاحظ أن هناك فرق بسيط بين نتيجتي الطريقتين.

- إيجاد الجملة المركبة في حالة المعدل غير مجدول: عندما يكون معدل الفائدة المركب غير موجود في الجدول المالي، فإنه يُمكن إتباع طريقة الحساب البحث والطريقة اللوغاريتمية.

مثال:

بالطريقة اللوغاريتمية أوجد جملة مبلغ قدره 2000 وحدة نقدية وُظف لمدة 5 سنوات بمعدل فائدة مركب سنوي 5.8%.

الحل:

$$C = 2000$$

$$i = 5.8\%$$

n= 5

$$C_n = C(1+i)^n \Rightarrow C_5 = 2000(1.058)^5 \Rightarrow LogC_7 = Log2000(1,06)^7$$

$$LogC_5 = Log2000 + Log(1.058)^5 \Rightarrow LogC_5 = Log2000 + 5Log(1.058)$$

$$LogC_5 = 3.30103 + 5(0.02448567) \quad = 3.42345835$$

$$C_5 = 10^{3.42345835} = \boxed{C_5 = 2651.30 \text{ وحدة نقدية}}$$

- إيجاد الجملة في حالة المعدل يُحسب على أساس جزء من السنة: إذا كان معدل الفائدة يُحسب على أساس جزء من السنة (سداسي، ثلاثي،...الخ) فإنه في هذه الحالة نقوم بضرب عدد المرات التي يُطبق فيها المعدل في السنة في عدد السنوات.

<u>مثال:</u>

أوجد جملة مبلغ قدره 5200 وحدة نقدية وُظف لمدة 3 سنوات بمعدل فائدة مركب نصف سنوي2.5%.

<u>الحل:</u>

$$C = 5200$$

$$i = 2.5\%$$

يُلاحظ أن معدل الفائدة المركب يُحسب على أساس سداسي وبالتالي فإن عدد المرات التي يُحسب فيها المعدل هو مرتين في السنة وبالتالي 6 مرات في 3 سنوات ومنه: n=6

$$C_n = C(1+i)^n \Rightarrow C_6 = 5200(1+0.025)^6 = 5200(1.15969342)$$

$$\boxed{C_6 = 6030.41 \text{ وحدة نقدية}}$$

<u>- عمليات على القانون الأساسي للفائدة المركبة:</u>

1- أصل المبلغ مجهول : انطلاقا من القانون الأساسي للفائدة المركبة، يُمكن إيجاد قيمة المبلغ في بداية المدة ويُدعى أيضا بالقيمة الحالية للجملة مع ضرورة معلومية باقي العناصر.

$$C_n = C(1+i)^n \Longrightarrow C = \frac{C_n}{(1+i)^n} \Longrightarrow \boxed{C = C_n(1+i)^{-n}}$$

ويتم إستخدام الجدول المالي رقم 2 لاستخراج المقدار $(1+i)^{-n}$ ومن تم إيجاد قيمة أصل المبلغ.

ويُمكن أيضاً إستخدام الطريقة اللوغاريتمية.

كما يُمكن إستخدام الجدول المالي رقم 1 لإيجاد أصل المبلغ في حالة إستخدام العلاقة التالية:

$$C = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

مثال:

أودع أحد الأشخاص مبلغا من المال لدى احد البنوك بمعدل فائدة مركب 5.75% ولمدة 8 سنوات ليتحصل في نهاية المدة على جملة مركبة قدرها 2450 وحدة نقدية.

المطلوب: ماهو المبلغ الذي أودعه هذا الشخص؟

الحل

$$C_8 = 2450$$

$$i = 5.75\%$$

$$n = 8$$

$$C = C_n(1+i)^{-n} \Rightarrow C = 2450(1.0575)^{-8} \Rightarrow C = 2450(1.0575)^{-8} \Rightarrow C = 2450(0.63937697)$$

$$\boxed{C = 1566.47 \text{ وحدة نقدية}}$$

- معدل الفائدة مجهول: لإيجاد معدل الفائدة، مع معلومية باقي العناصر، يمكننا استخدام الطريقة اللوغاريتمية أو الجداول المالية.

الطريقة اللوغاريتمية: يُمكن إيجاد معدل الفائدة بالطريقة اللوغاريتمية كما يلي:

$$C_n = C(1+i)^n \Rightarrow LogC_n = LogC + nLog(1+i) \Rightarrow$$

$$Log(1+i) = \frac{LogC_n - LogC}{n} \Rightarrow \boxed{i = 10^{\left(\frac{LogC_n - LogC}{n}\right)} - 1}$$

إستخدام الجداول المالية: يُمكن هنا الاستعانة بالجداول المالية لإيجاد معدل الفائدة كما يلي:

$$C_n = C(1+i)^n \Rightarrow \boxed{(1+i)^n = \frac{C_n}{C}}$$

وبعد ذلك نبحث عن القيمة الناتجة عن تقسيم الجملة على أصل المبلغ أي $\frac{C_n}{C}$ في الجدول المالي رقم 1 في السطر الذي يقابل المدة n (معلومة). ونكون هنا أمام حالتين:

الحالة الأولى: وجود حاصل قسمة $\frac{C_n}{C}$، والمعدل المقابل في العمود هو المعدل المطلوب.

الحالة الثانية: في حالة عدم وجود حاصل قسمة $\frac{C_n}{C}$ في الجدول المالي فإننا نقوم بتطبيق الخطوات التالية:

- نحدد القيمتين في الجدول المالي التي يقع بينهما حاصل قسمة $\frac{C_n}{C}$ في السطر التي تقع فيه المدة المعلومة، ونرمز للقيمة الكبرى بـ x_1 والقيمة الصغرى بـ x_2.
- نحدد معدلي الفائدة الذين يقابلان القيمتين المتحصل عليهما في الخطوة السابقة، ونرمز للمعدل الذي يقابل x_1 بـ i_1 والمعدل الذي يقابل x_2 بـ i_2.

ويتم إيجاد معدل الفائدة بالتناسب كما يلي:

$$\boxed{i = \frac{(i_1 - i_2) \times (\frac{C_n}{C} - x_2)}{(x_1 - x_2)} + i_2}$$

مثال:

أودع احد الأشخاص مبلغا من المال لدى احد البنوك قدره 1550وحدة نقدية ولمدة 5 سنوات ليتحصل في النهاية على جملة قدرها 2330.67 وحدة نقدية.

المطلوب: اوجد معدل الفائدة المركب الذي وُظف به المبلغ باستخدام الجداول المالية؟

الحل

$$C_5 = 2330.67$$

$$C = 1550$$

$$n = 5$$

$$(1+i)^n = \frac{C_n}{C} \Longrightarrow (1+i)^5 = \frac{2330.67}{1550} = 1.50365806$$

نقوم بالبحث عن القيمة المتحصل عليها في الجدول المالي رقم 1 عند السطر الذي يقابل 5 سنوات ونجد هذه القيمة عند المعدل 8.5%، إذا:

$$\boxed{i = 8.5\%}$$

مثال:

أقترض احد الأشخاص مبلغا من المال قدره 2000وحدة نقدية لمدة 4 سنوات ليتحصل في النهاية على جملة قدرها 2705.89 وحدة نقدية.

المطلوب: أوجد معدل الفائدة المركب؟

الحل

$$C = 2000$$

$$C_4 = 2705.89$$

$$n = 4$$

$$(1+i)^n = \frac{C_n}{C} \Rightarrow (1+i)^4 = \frac{2705,89}{2000} = 1,352945$$

وعند البحث في الجدول المالي رقم 1 عند السطر المقابل لـ n=4 فإننا لا نجد حاصل القسمة وبالتالي نلجأ إلى طريقة التناسب كما يلي:

نبحث عن القيميتين اللتين تحصران حاصل قسمة $\frac{C_n}{C}$ في السطر حيث نجد:

$$x_1 = 1.36048896, x_2 = 1.347935513$$

معدلي الفائدة المقابلين للقيميتن السابقتين هما:

$$i_1 = 8\%, i_2 = 7.75\%$$

$$i = \frac{(i_1 - i_2) \times (\frac{C_n}{C} - x_2)}{(x_1 - x_2)} + i_2 \Rightarrow i = \frac{(0.08 - 0.0775) \times (1.352945 - 1.34793551)}{(1.36048896 - 1.34793551)} + 0.0775$$

$$i = 0.07849 = 7.849\% = \boxed{7.85\%}$$

3- المدة مجهولة: لإيجاد مدة الإيداع أو مدة الإقتراض مع معلومية باقي العناصر يمكننا استخدام الطريقة اللوغاريتمية أو الجداول المالية.

الطريقة اللوغاريتمية: يُمكن إيجاد المدة بالطريقة اللوغاريتمية كما يلي:

$$C_n = C(1+i)^n \Rightarrow LogC_n = LogC + nLog(1+i) \Rightarrow \boxed{n = \frac{LogC_n - LogC}{Log(1+i)}}$$

إستخدام الجداول المالية: يُمكن هنا الاستعانة بالجداول المالية لإيجاد المدة كما يلي:

$$C_n = C(1+i)^n \Rightarrow \boxed{(1+i)^n = \frac{C_n}{C}}$$

وبعد ذلك نبحث عن القيمة الناتجة عن تقسيم الجملة على أصل المبلغ أي $\frac{C_n}{C}$ في الجدول المالي رقم 1 في العمود الذي يقابل المعدل المعلوم، وهنا نكون أمام حالتين:

الحالة الأولى: وجود حاصل قسمة $\frac{C_n}{C}$، والمدة المقابلة في السطر هي المدة المطلوبة.

الحالة الثانية: في حالة عدم وجود حاصل قسمة $\frac{C_n}{C}$ في الجدول المالي رقم 1 فإننا نقوم بتطبيق الخطوات التالية:

نحدد القيمتين في الجدول المالي التي يقع بينهما حاصل قسمة $\frac{C_n}{C}$ في العمود التي يقع فيه المعدل المعلوم، ونرمز للقيمة الكبرى بـ x_1 والقيمة الصغرى بـ x_2.

ويتم إيجاد عدد الأيام بالتناسب كما يلي:

$$\boxed{j = \frac{\left(\frac{C_n}{C} - x_2\right) \times 360}{\left(x_1 - x_2\right)}}$$

ومنه فإن المدة المطلوبة تكون عبارة عن المدة التي تقابل القيمة الصغرى x_2 مضافا إليها عدد الأيام المتحصل عليه من تطبيق القانون السابق.

مثال:

أودع احد الأشخاص مبلغا من المال لدى احد البنوك قدره 100000وحدة نقدية بمعدل فائدة 8% ليتحصل في النهاية على جملة قدرها 199900.463وحدة نقدية.

المطلوب: اوجد المدة التي وُظف بها المبلغ باستخدام الجداول المالية؟

الحل

$$C_n = 199900.463$$

$$C = 100000$$

$$i = 8\%$$

$$(1+i)^n = \frac{C_n}{C} \Longrightarrow (1.08)^n = \frac{199900.463}{100000} = 1.99900463$$

نقوم بالبحث عن القيمة المتحصل عليها في الجدول المالي رقم 1 عند العمود الذي يقابل معدل 8% ونجد هذه القيمة عند n=9 إذا:

$$\boxed{n = 9 \text{ سنوات}}$$

مثال:

أودع احد الأشخاص مبلغا من المال لدى احد البنوك قدره 4945 وحدة نقدية بمعدل فائدة 8% ليتحصل في النهاية على جملة قدرها 6794.88 وحدة نقدية.

المطلوب: اوجد المدة التي وُظف بها المبلغ باستخدام الجداول المالية؟

الحل

$$C = 4945$$

$$C_n = 6794.88$$

$$i = 8\%$$

$$(1+i)^n = \frac{C_n}{C} \Rightarrow (1.08)^n = \frac{6794.88}{4945} = 1.374091001$$

$$j = \frac{\left(\frac{C_n}{C} - x_2\right) \times 360}{(x_1 - x_2)} \Rightarrow j = \frac{(1.374091001 - 1.36048896) \times 360}{(1.46932808 - 1.36048896)}$$

$$j = 44.99 \approx \boxed{45 \text{يوما}}$$

ومنه فإن المدة الذي وُظف بها المبلغ هي 4 سنوات و 45 يوما.

- الخصم بفائدة مركبة:

- أنواع الخصم بفائدة مركبة: هناك نوعان من الخصم المركب:

- الخصم المركب التجاري: يُعرّف بأنه الفائدة المركبة للقيمة الإسمية للمدة المحصورة بين تاريخ السداد وتاريخ الإستحقاق

- الخصم المركب الصحيح: يُعرّف بأنه الفائدة المركبة للقيمة الحالية للمدة المحصورة بين تاريخ السداد وتاريخ الإستحقاق

- قانون الخصم المركب التجاري:

لنفترض أن:

E_{cc} : الخصم المركب التجاري

V_n: القيمة الاسمية للدين أو السند

V_{ac} : القيمة الحالية

i : معدل الخصم

n : المدة الفاصلة بين تاريخ الخصم وتاريخ الاستحقاق

ويُكتب قانون الخصم المركب التجاري كما يلي:

$$E_{cc} = V_n(1+i)^n - V_n \Rightarrow E_{cc} = V_n[(1+i)^n - 1]$$

أما القيمة الحالية وهو المبلغ الذي يتحصل عليه الدائن فتُحسب كما يلي:

$$V_{ac} = V_n - E_{cc}$$

مثال:

دين ممثل بسند قيمته 15000 وحدة نقدية يُستحق بعد 9 سنوات بمعدل فائدة مركب سنوي 5%.
المطلوب: أوجد قيمة الخصم المركب التجاري والقيمة الحالية؟

الحل:

$V_n = 15000$ وحدة نقدية

$i = 5\%$

$n = 9$ سنوات

إيجاد قيمة الخصم المركب التجاري:

$$E_{cc} = V_n[(1+i)^n - 1] = 15000[(1,05)^9 - 1] = 15000(1,551328216 - 1)$$

$E_{cc} = \mathbf{8269,92}$ وحدة نقدية

إيجاد القيمة الحالية:

$V_{ac} = V_n - E_{cc} = 15000 - 8269,92 = \mathbf{6730,08}$ وحدة نقدية

ملاحظة: يُلاحظ أن القيمة الحالية أقل من قيمة الخصم المركب التجاري وهذا ليس منطقي، وأيضا يُمكن أن تتجاوز قيمة الخصم المركب التجاري للقيمة الإسمية كلما زاد معدل الفائدة المركب أو المدة أو هما معا وهذا غير منطقي طبعا، لهذا فإنه يتم إستعمال الخصم المركب الصحيح في عمليات خصم الديون الطويلة الأجل.

- قانون الخصم المركب الصحيح:

لنفترض أن:

E_{rc} : الخصم المركب الصحيح

V_n : القيمة الاسمية للدين أو السند

V'_{ac} : القيمة الحالية

i : معدل الخصم

n : المدة الفاصلة بين تاريخ الخصم وتاريخ الاستحقاق

ويُكتب قانون الخصم المركب الصحيح كما يلي:

$$E_{rc} = V_n - V_n(1+i)^{-n} \Rightarrow E_{rc} = V_n[1-(1+i)^{-n}]$$

أما القيمة الحالية فتُحسب كما يلي:

$$V'_{ac} = V_n - E_{rc}$$

مثال:

من المثال السابق أوجد قيمة الخصم المركب الصحيح والقيمة الحالية؟

الحل:

$V_n = 15000$ وحدة نقدية

$i = 5\%$

$n = 9$ سنوات

إيجاد قيمة الخصم المركب الصحيح:

$$E_{rc} = V_n[1-(1+i)^{-n}] = 15000[1-(1{,}05)^{-9}] = 15000(1-0{,}644608916)$$

$E_{rc} = \mathbf{5330,87}$ وحدة نقدية

إيجاد القيمة الحالية:

$V'_{ac} = V_n - E_{rc} = 15000 - 5330{,}87 = \mathbf{9669,13}$ وحدة نقدية

- المعدلات المتناسبة والمعدلات المتكافئة:

عادة ما يتم إستخدام معدلات الفائدة سنوياً، أي أن هذه المعدلات تُطبق مرة واحدة في السنة على المبلغ في كل نهاية سنة. إلا أن هناك تطبيق لمعدل الفائدة على أجزاء من السنة (شهر، ثلاثي، سداسي،...إلخ)، وفي هذه الحالة فإن المدة n لا تُصبح بالسنوات بل بعدد الفترات الجزئية من السنة، وبعبارة أخرى، عدد مرات تطبيق معدل الفائدة في السنة. وحتى في هذه الحالة يُمكن إستخدام الجداول المالية حيث يتم إعتبار n في الجداول المالية عبارة عن عدد مرات تطبيق معدل الفائدة المركبة. وفي حالة تطبيق معدلات فائدة غير سنوية أو جزئية من السنة يُمكن أن نتحدث عن معدلات متناسبة ومعدلات مكافئة.

- المعدلات المتناسبة:

المعدل المتناسب لمعدل سنوي معين i هو المعدل الذي يُطبق في p جزء من السنة بحيث يحدد هذا المعدل i_p حسب العلاقة :

$$i_p = \frac{i}{p}$$

فمعدل 8% السنوي = المعدل السداسي المتناسب $i_p = \frac{i}{p} \Rightarrow i_2 = \frac{8\%}{2} = 4\%$

= المعدل الثلاثي المتناسب $i_p = \frac{i}{p} \Rightarrow i_4 = \frac{8\%}{4} = 2\%$

= المعدل الشهري المتناسب $i_p = \frac{i}{p} \Rightarrow i_{12} = \frac{8\%}{12} = 0.67\%$

ولا تتساوى الجملة المركبة في نهاية المدة عند إستثمار مبلغين متساويين ولنفس المدة لكن أحدهما بمعدل فائدة مركب سنوي والآخر بمعدل فائدة مركب متناسب. فإذا كان i هو المعدل السنوي و $\frac{i}{4}$ هو المعدل الثلاثي المتناسب له، فإن الجملة المركبة لكل مبلغ خلال فترة زمنية واحدة (سنة مثلا) هي على التوالي :

$$C_n = C(1+i)$$

$$C_n = C\left(1+\frac{i}{4}\right)^4$$

والمحدد لكل من الجملتين هما قيمتا كل من $(1+i)$ و $\left(1+\frac{i}{4}\right)^4$ على التوالي وهما غير متساويتين.

مثال:

أودع أحد الأشخاص مبلغ من المال لدى أحد البنوك قدره 2200 وحدة نقدية بمعدل فائدة مركب سنوي 8% لمدة 5 سنوات.

المطلوب: أوجد قيمة الجملة المركبة باستخدام معدل الفائدة السنوي ثم المعدل الثلاثي (كل ثلاثة أشهر) المتناسب وماذا تلاحظ؟

الحل:

حساب الجملة المركبة باستخدام معدل الفائدة السنوي:

$$C_n = C(1+i)^n \Rightarrow C_5 = 2200(1+0.08)^5 = 2200(1.469328077) = \mathbf{3232.52}$$ وحدة نقدية

حساب الجملة المركبة باستخدام المعدل الثلاثي المتناسب:

المعدل السنوي 8%= المعدل الثلاثي المتناسب $$i_p = \frac{i}{p} \Rightarrow i_4 = \frac{8\%}{4} = 2\%$$

$$I = C\left[\left(1+i_p\right)^{p\times n} - 1\right] = C[(1+i_4)^{4\times 5} - 1] = 2200[(1+0.02)^{20} - 1]$$

$$C_{p\times n} = C\left(1+i_p\right)^{p\times n} \Rightarrow C_{4\times 5} = 2200(1+0.02)^{4\times 5} \Rightarrow C_{20} = 2200(1.02)^{20} = 2200(1.485947396)$$

$$C_{20} = \mathbf{3269,08}$$ وحدة نقدية

يُلاحظ أن الجملة المركبة بتطبيق معدل الفائدة المركب السنوي والجملة المركبة بتطبيق معدل الفائدة الثلاثي المتناسب غير متساويين حيث أن قيمة الثانية أكبر من قيمة الأولى.

- المعدلات المتكافئة:

هي المعدلات التي تؤدي إلى نفس الجملة لنفس المدة، فالمعدل السنوي المكافئ لمعدل ثلاثي معين يعطي نفس الجملة لمدة سنة مثلا. فإذا كان المبلغ C مستثمرا لمدة سنة بمعدل سنوي i يصبح في نهاية السنة:

$$C_n = C(1+i)$$

وهذا المبلغ C يُستثمر لنفس المدة بمعدل جزئي i_p بحيث يُطبق p مرة في السنة تكون جملته:

$$C'_n = C(1+i_p)^p$$

وحتى يكون المعدلان متكافئين يجب تساوي الجملتين:

$$C_n = C'_n \Rightarrow C(1+i) = C\left(1+i_p\right)^p \Rightarrow i = \left(1+i_p\right)^p - 1 \Rightarrow i_p = \sqrt[p]{(1+i)} - 1$$

$$i_p = (1+i)^{\frac{1}{p}} - 1$$

مثال:

من المثال السابق أوجد قيمة الجملة المركبة باستخدام معدل الفائدة المركب لكل 4 أشهر المكافئ لمعدل الفائدة السنوي وماذا تلاحظ؟

الحل:

معدل الفائدة المركب لكل أربعة أشهر المكافئ لمعدل الفائدة المركب السنوي:

$$i_p = (1+i)^{\frac{1}{p}} - 1 \Rightarrow i_3 = (1+0{,}08)^{\frac{1}{3}} - 1 \approx 0{,}026$$

$$i_3 = \mathbf{2,6}\%$$

$$C_{n\times p} = C\left(1+i_p\right)^{n\times p} \Rightarrow C_{5\times 3} = 2200(1+0.026)^{5\times 3} \Rightarrow C_{15} = 2200(1.026)^{15}$$

$$C_{15} = 2200(1{,}4696381312) = \mathbf{3233,2}$$ وحدة نقدية

يُلاحظ أن الجملة المركبة بتطبيق معدل الفائدة المركب السنوي والجملة المركبة بتطبيق معدل الفائدة المركب لكل 4 أشهر المكافئ لمعدل الفائدة السنوي متساويين (في مثالنا هناك فرق بسيط جدا بين القيمتين بسبب التقريب)