المحور 02: التنبؤ بنماذج الاستقطاب

المحاضرة 04

يقصد بنماذج الاستقطاب النماذج التالية:

- النموذج العشوائي: والذي يحتوي فقط على المركبة العشوائية.
- نموذج الاتجاه العام: والذي يحتوي على مركبة الاتجاه العام والمركبة العشوائية.
- النموذج الكلي (العام): يحتوي على مركبة الاتجاه العام والمركبة العشوائية والفصلية.

للتنبؤ بنماذج الاستقطاب نكتفي بطريقة المربعات الصغرى العادية (OLS)، حيث من خلالها نتطرق الى طريقة Buys- Ballot وطريقة هولت ونترز Holt-Winters.

1- التنبؤ بنماذج الاتجاه العام:

1-1- **تقدير معلمات نموذج الاتجاه العام:** يكتب نموذج الاتجاه العام بالشكل التالي:

$$Y_t = \alpha + \beta T + \varepsilon_t$$

حيث α وβ: معلمات نريد تقديرها بطريقة OLS.

ε_t : المتغير العشوائي الذي يعبر عن جميع العوامل التي تؤثر في المتغير التابع والتي لم ندرجها في النموذج.

Y_t : المتغير التابع أو قيم الظاهرة المدروسة.

T : المتغير المستقل، أو المتغير المؤثر في المتغير التابع.

للقيام بعملية التنبؤ، نقوم أولا بتقدير معلمات النموذج α وβ وهذا انطلاقا من طريقة OLS التي تقوم على

تصغير مجموع مربعات البواقي:

$$Min \sum \left(Y_t - \widehat{Y}_t\right)^2 = Min \sum \left(Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} T\right)^2 = f\left(\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right)$$

لاستخراج صيغ كل من $\hat{\alpha}$ و$\widehat{\beta}$ نقوم بالاشتقاقات الجزئية الأولى:

$$\frac{\partial \sum \left(Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} T\right)^2}{\partial \hat{\alpha}} = 0 \Rightarrow \boxed{\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta} \bar{T}}$$

$$\frac{\partial \sum \left(Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} T\right)^2}{\partial \hat{\beta}} = 0 \Rightarrow \boxed{\hat{\beta} = \frac{\sum Y_t . T - n \bar{Y} \bar{T}}{\sum T^2 - n \bar{T}^2}} = \frac{cov(Y_t, T)}{V(T)}$$

ومع أنّ: $\bar{T}=\frac{n+1}{2}$ فإنّ $V(T)=\frac{n^2-1}{12}$

وبالتالي:

$$\hat{\alpha}=\bar{Y}-\hat{\beta}\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

$$\hat{\beta}=\frac{\sum Y_t.T-n\left(\frac{n+1}{2}\right)\bar{Y}}{n\left(\frac{n^2-1}{12}\right)}$$

1 -2- حساب التباينات المقدرة:

أ- **بالنسبة للمتغير العشوائي:** يعطى التباين المقدر للمتغير العشوائي بالعلاقة التالية:

$$V(\varepsilon_t)=\widehat{\sigma_\varepsilon^2}=\frac{\sum \varepsilon_i^2}{n-k}$$

حيث k هو عدد المعلمات المقدرة في النموذج.

ب- **بالنسبة للمعلمتين $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ و$\hat{\boldsymbol{\alpha}}$:**

يعطى تباين المقدر $\hat{\beta}$ بالعلاقة التالية:

$$V(\hat{\beta})=\frac{V(\varepsilon_t)}{\sum(T-\bar{T})^2}=\frac{V(\varepsilon_t)}{n\left(\frac{n^2-1}{12}\right)}$$

يعطى تباين المقدر $\hat{\alpha}$ بالعلاقة التالية:

$$V(\hat{\alpha})=\bar{T}^2V(\hat{\beta})+\frac{V(\varepsilon_t)}{n}$$

1 -3- صلاحية النموذج ومجال الثقة للتنبؤ:

لاختبار مدى صلاحية نموذج الانحدار بصفة عامة ونموذج الاتجاه العام بصفة خاصة، نستعمل بعض الأدوات الإحصائية، من بينها إحصاءة "ستودنت t" لاختبار معنوية معلمات النموذج كل واحدة على حدى.

نقوم باختبار الفرضيتين التاليتين:

$$\begin{cases} H_0: \beta=0 \\ \quad vs \\ H_1: \beta\neq 0 \end{cases}$$

وذلك بحساب إحصاءة ستودنت:

$$|t_c| = \left|\frac{\hat{\beta}-\beta}{\sqrt{V(\hat{\beta})}}\right| \backsim t_{\left(\frac{\alpha}{2},n-k\right)}$$

القرار:

نرفض H_0 إذا كانت الاحصاءة المحسوبة أكبر من المجدولة $\left(|t_c| > t_{\left(\frac{\alpha}{2},n-k\right)}\right)$، وبالتالي النموذج مقبول وصالح للتنبؤ.

كما يمكن تحديد مجال الثقة للقيمة المتنبأ بها للفترات اللاحقة عند مستوى معنوية يتم تحديده، حيث نحتاج إلى تباين خطأ التقدير للمتغير المعياري، والمعطى بالعلاقة التالية:

$$V(Z\theta) = V(\varepsilon_t)\left(1+\frac{1}{n}\right) + \left(\theta-\overline{T}\right)^2 . V(\hat{\beta})$$

ويكتب مجال الثقة لهذا التنبؤ بالشكل التالي:

$$\hat{Y} + t_{\left(\frac{\alpha}{2},n-k\right)}\sqrt{V(Z\theta)} \quad , \quad \hat{Y} - t_{\left(\frac{\alpha}{2},n-k\right)}\sqrt{V(Z\theta)}$$

2- التنبؤ بالنماذج الخاضعة للتغيرات الموسمية:

حيث تضاف المركبة الموسمية إلى المركبة العشوائية ومركبة الاتجاه العام:

$$Y_t = \alpha + \beta T + S + \varepsilon_t$$

لتقدير معلمات هذا النموذج نستعمل طريقة المربعات الصغرى العادية OLS مستعينين بجدول Buys–Ballot.

2- 1- تقدير معلمات النموذج باستعمال طريقة "جدول Buys–Ballot":

تجدر الإشارة في البداية أنه ولتطبيق هذه الطريقة يجب أن يكون شكل النموذج تجميعيا (شكل تجميعي):

$$Y_t = a + bT + S_t + \varepsilon_t$$

مع أنّ: مجموع المعاملات الفصلية تساوي صفر، أي: $\sum_{j=0}^{m} S_j = 0$

- لتسهيل تقدير معلمات النموذج، نضع التغييرات التالية:

$$\boldsymbol{t = (j + m(i-1))}$$

حيث: **j:** هو رقم جزء السنة (رقم الشهر أو السداسي...).

m: عدد أجزاء السنة (عدد الأشهر، عدد الثلاثيات...).

i : رقم السنة.

وبالتالي يكتب النموذج بالشكل التالي:

$$Y_{ij} = b\big(j + m(i-1)\big) + a_j + \varepsilon_{ij}$$

مع أنّ: $a_j = a + S_j$

- نلاحظ من خلال هذه المعادلة أنه لدينا معلمتين b و a_j، نقوم بتقديرهما باستعمال طريقة OLS:

$$Min \sum_i \sum_j {\varepsilon_{ij}}^2 = \sum_i \sum_j \left[Y_{ij} - b\big(j + m(i-1)\big) - a_j\right]^2$$

2-2- البحث عن علاقات المعلمات:

أ- **البحث عن علاقة (a_j):** للبحث عن علاقة a_j والتي من خلالها يمكن التوصل إلى علاقة a ، نستعمل الاشتقاقات الجزئية الأولى للمعادلة السابقة:

$$\frac{\partial \sum_i \sum_j {\varepsilon_{ij}}^2}{\partial a_j} = 0 \Rightarrow \boxed{\overline{Y_j} = \frac{\sum Y_{ij}}{n}}$$

حيث $\overline{Y_j}$ عبارة عن متوسط جزء السنة، مثلا المتوسط الشهري أو الثلاثي...

j متوسط الشهر أو الثلاثي بالنسبة لكل السنوات.

إذن:

$$\boxed{a_j = \overline{Y_j} - b\left(j + m\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)}$$

مع أن: $\sum \frac{(i-1)}{n} = \frac{n-1}{2}$

ب- البحث عن علاقة a:

لدينا : $a_j = a + S_j$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{m} a_j = \sum a + \sum S_j$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{m} a_j = \sum a$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{m} a_j = m\,.\,a$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{\sum_{j=1}^{m} a_j}{m}}$$

من جهة أخرى، لدينا:

$$a_j = \bar{Y}_j - b\left(j + m\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow a = \frac{\sum_{j=1}^{m}\left[\bar{Y}_j - b\left(j + m\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)\right]}{m}$$

ومع أن: $\bar{\bar{Y}} = \frac{\sum_{j=1}^{m} Y_j}{m}$، والذي يمثل متوسط المتوسطات سواء بالنسبة للمتوسطات السنوية أو متوسطات أجزاء السنة. وكذلك $\frac{b(m+1)}{2} = \frac{b(m+1)}{m} = \frac{b\sum j}{m} = \frac{\sum b.j}{m}$ فإنّ العلاقة النهائية لـــ a تصبح:

$$\Rightarrow \boxed{a} = \bar{\bar{Y}} - b\left[\frac{\mathrm{m}+1}{2} + \frac{m(n-1)}{2}\right] = \boxed{\bar{\bar{Y}} - b\left(\frac{m.n+1}{2}\right)}$$

ت- البحث عن علاقة S_j:

لدينا: $a_j = a + S_j$

$$\Rightarrow S_j = a_j - a$$

ولدينا كذلك:

$$a_j = \bar{Y}_j - b\left(j + m\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)$$

و

$$a = \bar{\bar{Y}} - b\left(\frac{m.n+1}{2}\right)$$

وبذلك:

$$\Rightarrow S_j = \bar{Y}_j - b\left(j + m\left(\frac{n-1}{2}\right)\right) - \left(\bar{\bar{Y}} - b\left(\frac{m.n+1}{2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow S_j = \bar{Y}_j - \bar{\bar{Y}} - b\left(j - \frac{m+1}{2}\right)$$

ث- البحث عن علاقة b:

بنفس الطريقة التي تحصلنا بها على علاقة a_j، أي نقوم بإشتقاق الكمية $\frac{\partial \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij}{}^2}{\partial b}$، وفي الأخير نحصل على:

$$b = \frac{12\left[\sum i\bar{Y}_i - \frac{n(n+1)}{2}\bar{\bar{Y}}\right]}{n.m(n^2-1)}$$

2-3- تحليل نموذج التنبؤ الذي يحتوي على مركبة الاتجاه العام والمركبة الموسمية: