ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDER SUPÉRIEURE

0.1 Équations différentielles du second ordre

La forme générale d'une équations différentielles du second ordre est

$$F(t, y, y', y'') = 0.$$

Sa forme normale ou résolue est

$$y'' = F(t, y, y').$$

La solution générale y dépend en générale de deux paramètres $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ qui apparaissent le plus souvent comme des constantes d'intégration.)

0.1.1 Équations différentielles type-homogène du second order

Ce sont les équations différentielles qui peuvent mettre sous la forme

$$F\left(t, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}\right) = 0.$$

La résolution de ces équations se fait en effectuant un changement de fonction inconnue en posant $u(t) = \dfrac{y'(t)}{y(t)}$, et donc $\dfrac{y''}{y} = u' + u^2$. On est ramené à une équation différentielle du premier ordre de la forme $F(t, u, u' + u^2) = 0$.

Exemple 0.1.1 *Soit l'équation* $yy'' - (y')^2 + 6ty^2 = 0$.
En divise par y^2*, on peut écrire cette équation sous la forme* $\frac{y''}{y} - (\frac{y'}{y})^2 + 6t = 0$.
On effectue un changement de fonction inconnue en posant $u = \dfrac{y'}{y}$. *D'où* $y' = uy \Rightarrow y'' = u'y + uy'$*, d'où*

$$\frac{y''}{y} = u' + u\frac{y'}{y} = u' + u^2.$$

Donc l'équation $\frac{y''}{y} - (\frac{y'}{y})^2 + 6t = 0$ *devient* $u' + u^2 - u^2 + 6t = 0 \Rightarrow u' + 6t = 0 \Rightarrow u = -3t^2 + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *et donc* $\dfrac{y'}{y} = -3t^2 + \lambda$ *qui est une équation différentielle du premier ordre ayant pour solution générale :* $\ln|y| = -t^3 + \lambda t + c$ *donc* $y = \mu e^{-t^3+\lambda t}$ *tels que* $\lambda \in \mathbb{R}, \mu = \pm e^c \in \mathbb{R}$.

0.1.2 Équations différentielles linéaires du second ordre

Considérons l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t) \tag{1}$$

Définition 0.1.2 *(Solution indépendantes)*
Deux solutions y_1 *et* y_2 *de l'équation (1) sont indépendantes sur un intervalle* I *s'il n'existe pas de réel* k *tel que pour tout* $t \in I$: $y_2(t) = ky_1(t)$.

Remarque 0.1.3 *Les fonctions* y_1 *et* y_2 *sont indépendantes cela signifie linéairement indépendantes au sens des espaces vectoriels.*

Définition 0.1.4 *Soient deux solutions dérivables* $t \mapsto y_1(t)$ *et* $t \mapsto y_2(t)$ *sur un intervalle* I. *Le wronskien de ces deux fonctions est défini à l'aide d'un déterminant*

$$W(y_1(t), y_2(t)) = \det\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix} = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t).$$

Les deux fonctions dérivables $t \mapsto y_1(t)$ et $t \mapsto y_2(t)$ sont linéairement indépendantes si et seulement si leur wronskien $W(y_1(t), y_2(t))$ n'est pas identiquement nul.

Exemple 0.1.5 *Les fonctions $t \mapsto \sin t$ et $t \mapsto e^t$ sont indépendantes.*

Les fonctions $f : t \mapsto 3e^{-t} \sin t$ et $g : t \mapsto 5e^{-t} \sin t$ ne le sont pas puisque $g = \frac{5}{3} f$.

0.1.3 Equations linéaires homogènes du second ordre

Si $c(t \equiv 0)$ on dit que l'équation (1) est linéairement homogène ou sans second membre

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \tag{2}$$

Cas où l'on connaît deux solutions particulières indépendantes :

Si y_1 et y_2 sont deux solutions indépendantes de l'équation (2), alors la solution générale de cette équation différentielle est $y = \lambda y_1 + \mu y_2$ et λ et μ étant des constantes arbitraires.

Exemple 0.1.6 *Pour l'équation différentielle homogène $t^2 y'' - 2y = 0$, en cherchant des solutions sous la forme $y(t) = t^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, on trouve que $y_1(t) = t^2$ et $y_2(t) = \dfrac{1}{t}$ sont des solutions particulières. Et on a*

$$W(t^2, \frac{1}{t}) = \det \begin{pmatrix} t^2 & \frac{1}{t} \\ 2t & -\frac{1}{t^2} \end{pmatrix} = -3 \neq 0.$$

Donc d'après la propriété ci-dessus, la solutions générale de l'équation différentielle est de la forme $y(t) = \lambda t^2 + \dfrac{\mu}{t}, \lambda, \mu, \in \mathbb{R}$.

Cas où l'on connaît une solution particulière :

Considérons l'équation différentielle homogène (2) pour laquelle on connaît une solution particulière y_1.

La méthode pour trouver la solution générale consiste à effectuer un changement de fonction en posant $y(t) = y_1(t)z(t)$, où z étant la nouvelle fonction inconnue, il vient

$$y_1''z + 2y_1'z' + z''y_1 + a(t)(y_1'z + y_1z') + b(t)y_1z = 0.$$

Comme y_1 est solution de notre équation différentielle, alors on obtient

$$y_1z'' + (2y_1' + a(t)y_1)z' = 0.$$

On pose $u = z'$, donc u solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, qui se peut se réécrire

$$\frac{u'}{u} = \frac{z''}{z'} = -2\frac{y_1'(t)}{y_1(t)} - a(t).$$

La solution générale est donnée par $u(t) = \lambda(y_1(t))^{-2}e^{\int a(t)dt}, \lambda \in \mathbb{R}$. D'où $z(t) = \int u(t)dt + \mu, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. La solution générale de (2) est donc

$$y(t) = y_1(t)\int u(t)dt + \mu y_1(t), \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemple 0.1.7 *Considérons l'équation* $(t+1)y'' - (2t-1)y' + (t-2)y = 0$.
On peut vérifier que $y_1(t) = e^t$ *est une solution particulière.*
Cherchons la solution générale sous la forme $y(t) = e^tz(t)$, *alors*

$$(t+1)(e^tz + 2e^tz' + z''e^t) - (2t-1)(e^tz + e^tz') + (t-2)e^tz = 0.$$

Après simplification et puisque y_1 *solution de notre équation différentielle, alors on obtient :* $(t+1)z'' = -3z'$ *En posant* $u = z'$, *on a* $(t+1)u' = -3u$ *qui est une équation différentielle du premier ordre ayant pour solution* $u(t) = \dfrac{\lambda}{(t+1)^3}$. *D'où*

$$z(t) = \int u(t)dt = \frac{-2\lambda}{(t+1)^2} + \mu, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

La solution générale de notre équation différentielle est donc

$$y(t) = y_1(t)z(t) = \left(\frac{-2\lambda}{(t+1)^2} + \mu\right)e^t, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

0.1.4 Equations linéaires non homogènes du second ordre

Si $c(t) \neq 0$ on dit quie l'équation (1) est linéaire non homogène ou avec second membre. L'équation (2) est l'équation homogène associée.

Comme pour les équations différentielles linéaires du premier ordre, la solution générale de l'équation non homogène (1) est égale à la somme de la solution générale de l'équation homogène (2) et d'une solution particulière de l'équation non homogène.

Variations des constantes :

Supposons qu'on connaisse la solution générale $y = \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ de l'équation homogène $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$. On peut alors chercher la solution générale par la méthode de variation des constantes.

Le principe de cette méthode est de considérer λ et μ comme fonctions de la variable t. Cherchons la solution sous la forme $y = \lambda y_1(t) + \mu y_2(t)$. En reportant cette fonction dans l'équation non homogène et utilisé le fait que y_1 et y_2 sont solutions de l'équation homogène on obtient après simplification :

$$2\lambda' y_1' + 2\mu' y_2' + \lambda'' y_1 + \mu'' y_2 + a(t)(\lambda' y_1 + \mu' y_2) = c(t).$$

Et donc les dérivées λ' et μ' doivent vérifier le système

$$\begin{cases} \lambda' y_1 + \mu' y_2 = 0, \\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' = c(t). \end{cases}$$

On résolvant ce système on obtient

$$\lambda' = \frac{-c(t)y_2}{y_1 y_2' - y_1' y_2}, \quad \mu' = \frac{c(t)y_1}{y_1 y_2' - y_1' y_2}.$$

D'où la solution générale de l'équation non homogène est :

$$y_1 \int \frac{-c(t)y_2}{y_1 y_2' - y_1' y_2} dt + y_2 \int \frac{c(t)y_1}{y_1 y_2' - y_1' y_2} dt$$

Exemple 0.1.8 *Considérons l'équation $y'' - \frac{2}{t^2}y = te^t$. En cherchant des solutions pour l'équation homogène $y'' - \frac{2}{t^2}y = 0$. sous la forme $y(t) = t^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, on trouve*

que $y_1(t) = t^2$ *et* $y_2(t) = \dfrac{1}{t}$ *sont deux solutions particulières indépendantes. D'où la solution générale de l'équation homogène est de la forme* $y_h(t) = \lambda t^2 + \dfrac{\mu}{t}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
On va donc chercher la solution particulière de l'équation non homogène sous la forme $y_p(t) = \lambda(t)t^2 + \dfrac{\mu(t)}{t}$. *Les dérivées* λ' *et* μ' *doivent vérifier le système*

$$\begin{cases} \lambda' y_1 + \mu' y_2 = 0, \\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' = c(t). \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} \lambda' t^2 + \dfrac{\mu'}{t} = 0, \\ 2t\lambda' - \dfrac{\mu'}{t^2} = te^t. \end{cases}$$

On en déduit que $\lambda' = \frac{1}{3}e^t, \mu' = \frac{-1}{3}t^3e^t$ *et donc*

$$\lambda(t) = \frac{1}{3}e^t, \mu(t) = \frac{1}{3}e^t(-t^3 + 3t^2 - 6t + 6).$$

D'où la solution générale de l'équation non homogène est

$$y_g(t) = e^t(t - 2 + \frac{2}{t}) + \lambda t^2 + \frac{\mu}{t},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

0.1.5 Équations linéaires du second ordre à coefficients constants

Une équations linéaires du second ordre à coefficients constants, est une équation du type

$$y'' + ay' + by = c(t),$$

où les coefficients a et b sont des constantes réelles, $t \mapsto c(t)$ est une fonction donnée continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.
Comme dans le cas à coefficients non constants, on commence par résoudre l'équation homogène associée ou sans second membre

$$y'' + ay' + by = 0.$$

On cherche des solutions sous la forme $y = e^{rt}, r \in \mathbb{R}$. En substituant dans notre équation homogène, on obtient

$$(r^2 + ar + b)e^{rt} = 0.$$

Comme la fonction exponentielle n'est jamais nulle, pour avoir une solution il faut que

$$r^2 + ar + b = 0.$$

Cette équation se nomme l'équation caractéristique associée à notre équation homogène. Les valeurs de r se trouvent aisément à l'aide de la formule quadratique

$$r = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Trois cas peuvent alors se produire

Si $a^2 - 4b > 0$, on trouve deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, ce qui montre que les fonctions $y_1 = e^{r_1 t}$ et $y_2 = e^{r_2 t}$ sont deux solutions particulières indépendantes. La solution générale de l'équation homogène sera alors

$$y_h = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Si $a^2 - 4b = 0$, on trouve une racine réelle double r_0. Dans ce cas, l'obtention d'une solution réelle r_0 montre que la fonction $y_1 = e^{r_0 t}$ est une solution particulière, d'autre part on peut montrer que $y_2 = te^{r_0 t}$ est aussi solution. On en déduit alors que la solution générale de l'équation homogène est de la forme

$$y_h = (\lambda t + \mu)e^{r_0 t}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Si $a^2 - 4b < 0$, on trouve deux racines complexes distinctes et conjuguées de forme générale $r_1 = \alpha - i\beta$ et $r_2 = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors la solution générale de l'équation homogène est

$$y_h = e^{\alpha t}(\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)), \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemple 0.1.9 *a)* $y'' + 4y' + 3y = 0$.

L'équation caractéristique est $r^2 + 4r + 3 = 0$, *on a* $r_1 = -3$ $r_2 = -1$. *Alors la solution générale est* $y = \lambda e^{-3t} + \mu e^{-t}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

b) $y'' + 4y' + 9y = 0$.

L'équation caractéristique est $r^2 + 4r + 9 = 0$*, on a* $r_1 = -2 - i\sqrt{5}$ $r_2 = -2 + i\sqrt{5}$*.*

Alors la solution générale est $y = e^{-2t}(\lambda \cos(\sqrt{5}t) + \mu \sin(\sqrt{5}t)), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$*.*

c) $y'' + 6y' + 9y = 0$*.*

L'équation caractéristique est $r^2+6r+9 = 0$*, on a* $r_1 = -3$ *une racine double. Alors la solution générale est* $y = (\lambda t + \mu)e^{-3t}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$*.*

Ensuite, il faut trouver une solution particulière y_p de l'équation avec le second membre. La solution générale sera

$$y_g = y_h + y_p.$$

0.2 Recherche d'une solution particulière pour des seconds membres spécifiques

Dans la pratique, c'est la forme de la fonction $c(t)$ qui nous indiquera sous quelle forme chercher la solution particulière.

Si $c(t) = p(t)$ est un polynôme de degré n :

Chercher une solution $q(t)$ qui soit un polynôme de degré n si $b \neq 0$, de degré $n + 1$ si $b = 0$ et $a \neq 0$, et de degré $n + 2$ si $a = 0$ et $b = 0$.